

# 创设“数形结合”情境 培养思维能力

王烽华

湖南省澧县第四中学 湖南 澧县 415500

**摘要:**“数形结合”即是数学学科的重要思想,又是数学研究的常用方法。

“数形结合”是求解数学问题的一种常用的思维方法。教师在教学中经常引导学生创设“数形结合”的情境,不仅可以沟通数与形的内在联系,把代数式的精确刻划与几何图形的直观描述有机地结合起来,力图在这种结合中,寻找到解题的思想与方法,同时又有利于开拓学生解题思路,发展学生形象思维能力。

**关键词:**数形结合 思维方法 形象思维能力

“数形结合”的方法一般来说可分为以下三种:

(1) 将几何论证转化为代数计算的“解析法”; (2) 利用数(式)来研究形的“以数(式)论形法” (3) 利用形来研究数(式)的“以形促数(式)法”。

下面举例分别加以说明:

## 一、解析法:

例1: 在正方形OABC中,  $\angle DOA = 15^\circ$   $OD=OB$  连接DA。

求证:  $DA \parallel BO$

解: 建立如图1所示的直角坐标系, 设正方形的边长为1

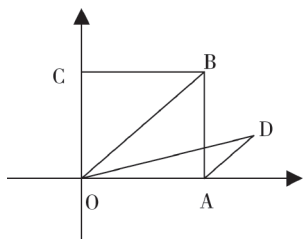


图1

则D、A的坐标分别为  $(\sqrt{2} \cos 15^\circ, \sqrt{2} \sin 15^\circ)$ ,  $(1, 0)$

$$\text{从而有 } K_{AD} = \frac{\sqrt{2} \sin 15^\circ}{(\sqrt{2} \cos 15^\circ - 1)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1} = 1$$

又  $K_{OB} = 1$

$\therefore OA \parallel OB$

总结评述: 有些平面几何题用解析几何的工具证明较为方便, 能发挥数形结合的优势。

## 二、以数论形法

例2: 如图2一动圆M在定圆  $x^2 + y^2 = r^2$  内且与定圆上半部以及X轴都相切, 求圆心M的轨迹的方程。

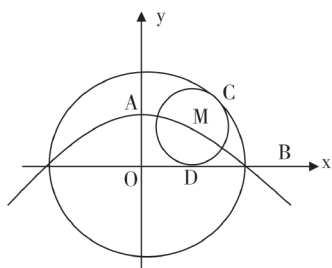


图2

解: 由几何条件(即形)易得如下等量关系(即数)

$$|OM| = |OC| - |MC| \quad (\odot O \text{ 与 } \odot M \text{ 内切于 } C)$$

$$|MC| = |MD| \quad (\odot M \text{ 与 } X \text{ 轴切于 } D)$$

$$|OM|^2 = |OD|^2 + |MD|^2 \quad (\triangle ODM \text{ 为 } Rt\triangle)$$

设圆心M的坐标为  $(x, y)$  于是有  $|OM| = r - y$

$$\text{又 } |OM| = r - y, \quad |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = r - y$$

$\therefore$  平方整理得圆心M的轨迹方程是

$$x^2 = -2r \left(y - \frac{r}{2}\right)$$

总结评述: 以数论形是解析几何侧重的手法, 象本例这种求曲线(轨迹)方程的问题其思考方法就是几何条件解析化, 即几何条件(形)——等量关系(数)——代数方程(式), 它是求曲线方程的关键和困难之处。

## 三、以形促数法

例3: 求函数  $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$  最小值

分析: 由题意可知, 函数的定义域为  $R$ , 若从代数角度考虑, 确实比较复杂; 若借助两点间的距离公式, 转化为几何问题, 则非常容易解决

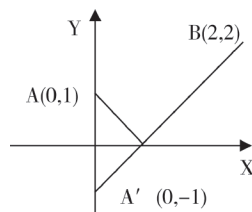


图3

$$\begin{aligned} \text{解: } y &= \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} \\ &= \sqrt{x - 0^2 + 0 - 1^2} + \sqrt{x - 2^2 + 0 - 2^2} \end{aligned}$$

令  $A(0, 1)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $P(X, 0)$

则问题化为: 在X轴求一点  $P(X, 0)$  使得  $|PA| + |PB|$  取最小值

$\therefore$  A关于X轴的对称点为  $A'(0, -1)$

$$\therefore |PA| + |PB| \min = |A'B| = \sqrt{2 - 0^2 + 2 + 1^2} = \sqrt{13}$$

注: 此题也可这样问: 当  $x$  取何值时  $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$  的值最小,  $X$  的取值是直线  $A'B$  与  $x$  轴的交点横坐标。

总结评述：代数问题几何化，问题变得容易解决。

例4：若锐角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  满足  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

求证： $\tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma \geq 2\sqrt{2}$

解：根据已知条件可设想一个如图4所示的长方体，使其对角线  $A_1C$  的长为1个单位，且与三条棱  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分别交成  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  角，

$$\text{又 } \tan\alpha = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}, \tan\beta = \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{b}, \tan\gamma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$$

由两个正数的算术平均数不小于这两数的几何平均数的定理。

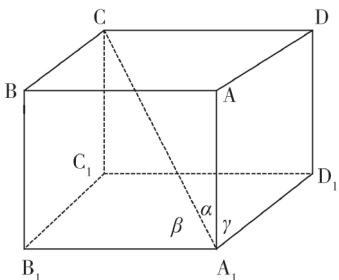


图4

$$\tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \geq \frac{2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \cdot 2\sqrt{ab}}{abc} = 2\sqrt{2}$$

当且仅当“ $a=b=c$ ”即长方体为正方体时取等号。

总结评述：对于三角问题学生往往只局限于三角知识解答，通过此题可以看出把三角问题恰当几何化，可以简化解题过程。

例5：求函数  $f(\theta) = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta - 1}$  的最大值与最小值

分析： $f(\theta) = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta - 1}$  可以看成两点  $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ， $A(2, 1)$  连线的斜率，而  $A$  为定点， $P$  是圆  $x^2 + y^2 = 1$  上的动点，因此，求数  $f(\theta)$  的最值问题就转化为求直线  $PA$  的斜率的最值问题了

解： $f(\theta)$  可以看成  $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ， $A(2, 1)$  两点连线

的斜率，且  $P$  在圆  $x^2 + y^2 = 1$  上运动，过定点  $A$  作圆的两条切线  $AP_1$ ， $AP_2$  则  $AP_1$  的斜率最小，且最小值为0， $AP_2$  的斜率最大，下面求  $AP_2$  的斜率

设： $AP_2$  的斜率为  $k$ ，则直线  $AP_2$  的方程  $y-1=k(x-2)$  即  $kx-y-2k+1=0$

$\therefore AB$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切

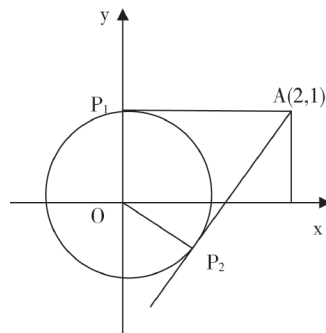


图5

$$\therefore \text{圆心到切线的距离为 } d = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{1 + k^2}} = 1$$

两边平方后并整理得  $3k^2 - 4k = 0$

$\therefore k=0$  或  $k = \frac{4}{3}$  (其中  $k=0$  是  $AP_1$  的斜率)

$\therefore AP_2$  的斜率为  $\frac{4}{3}$

$$\therefore f(\theta)_{\max} = \frac{4}{3} \quad f(\theta)_{\min} = 0$$

总结评述：此题是属三角问题充分利用解析几何这一工具，使问题转化为容易计算的简单问题

总之，由于“数形结合”具有形象直观，易于接受等优点，且对于沟通知识间的联系，活跃课堂气氛，开阔学生思路，发展智能，提高数学水平有着独到的作用，所以，我们要积极挖掘教材中“数形结合”的例题与习题，注重引导学生动脑筋，设计确切的数学模型，创设“数形结合”的情境，多加强学生形象思维的训练，进而促进学生从形象思维到抽象思维的转化；这样，我们就一定能逐步提高学生的数学水平，把学生逐步培养成具有创造思维能力和开拓精神的创造型人才。

