高中生在学习函数中的常见错误及对策

潘巨军

贵州省三都民族中学　贵州　三都　558100

摘　要：函数是中学数学中的难点内容，也是重点内容，很多学生在高一时学不好，本文针对解题中的常见错误这一问题谈一点看法，希望我们的学生很快对函数在定义域、值域、单调性、周期性、奇偶性等方面的问题有一个正确的认识。

关键词：定义域　值域　单调性　周期性。

有的学生在高考中，考不出好的成绩，并不是这些学生笨，而是因为题目太“狡猾”。题目中有很多的“陷阱”，使许多学生难以得出正确的结论。学生如果能够把会解的题都做对，成绩将会有很大提高。因此，很有必要研究一下学习的误区和错解原因。本文将讨论函数知识的学习误区和错解原因并提供对策。

一、求定义域和用定义域中的问题

许多同学在学习函数这一内容时，只注意记住函数的解析式，会运用函数的一些性质，对函数的三要素（定义、值域、解析式），只抓住一个要素，因此，在解题中错误百出。特别是定义域，在任何时侯都不要忘记，否则，将出许多错误。所以在解函数题时一定要注意定义域，特别在解应用题时，定义域还与实际问题有关。有的同学只考虑解析式有意义的范围，这是不对的。

二、在求值域中的错误

例 1　求函数 $y=\dfrac{\sin x}{4\sin^2 x+9}$ 的值域

错解：令 $\sin x=t$，则 $-1\le t\le 1$

$$4yt^2-t+9y=0, \qquad (1)$$

关于 t 的方程（1）应有实数解，得 $\Delta\ge 0$，即 $(-1)^2-4\cdot 4y\cdot 9y\ge 0$，$\therefore -\dfrac{1}{12}\le y\le\dfrac{1}{12}.$

原因分析：应用 $\Delta\ge 0$ 只保证方程（1）在实数范围内有解，而本题要求方程（1）是在 $[-1,1]$ 内有解。上面解法忽略了 $-1\le t=\sin x\le 1$。

正解：令 $\sin x=t$，则 $t\in[-1,1]$，$4yt^2-t+9y=0.$

当 $y=0$ 时 $t=0\in[-1,1]$；

当 $y\ne 0$ 时，$t^2-\dfrac{1}{4y}t+\dfrac{9}{4}=0$　　（2）

设 $f(t)=t^2-\dfrac{1}{4y}t+\dfrac{9}{4}$，若在 $[-1,1]$ 内有一解，则 $f(-1)f(1)\le 0$，$\therefore -\dfrac{1}{13}\le y\le\dfrac{1}{13}$，且 $y\ne 0$；若（2）在 $[-1,1]$ 有两解，则 $\Delta\ge 0$，$f(-1)\ge 0$，$f(1)\ge 0$，得 $y\in\varphi$. 综上所述 $-\dfrac{1}{13}\le y\le\dfrac{1}{13}$ 为求值域。

对策：在初中经常说错的话是“某方程无解”正确的说法是“方程无实数解”，在高中方程的解的情况常与范围有关，特别是隐含的范围，求值域若用判别式法，要考虑方程在什么范围内有解。

三、判定函数奇偶性中的错误

例 2　判断函数 $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的奇偶性

错解：$\because f(x)=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2con^2\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}$，而 $\tan\dfrac{x}{2}$ 是奇函数，$\therefore f(x)$ 是奇函数。

原因分析：一个函数是奇函数还是偶函数的必要条件是定义域关于原点对称。若不对称，则为非奇非偶函数。上题错解是因为：一是不考虑定义域，二是原函数与 $f(x)=\tan\dfrac{x}{2}$ 不是同一函数。

正确解法：由 $1+\sin x+\cos x\ne 0$ 得 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\ne 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，或 $x\ne 2k\pi-\pi(k\in Z)\}$ 它不是关于原点对称的区间，所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数

四、学习函数单调性中的错误

（1）认识概念的误区：误认为单调性一定在整个定义域内考虑，实际上单调性是指定义域中某个区间内的性质，这个区间可能是定义域，也可能不是。所以在判定或证明单调性要注意步骤，也要注意区间，有时要分成小区间讨论。

（2）复合函数单调性的判定

例 3　求函数 $f(x)=\log_{0.5}(x^2-8x+7)$ 的单调区间

错解：令 $y=\log_{0.5}u$，$u=x^2-8x+7$

因为 $y=\log_{0.5}u$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，$u=x^2-8x+7$ 在 $(-\infty,4)$ 上是减函数，在 $(4,+\infty)$ 是增函数。

所以 函数 $f(x)=\log_{0.5}(x^2-8x+7)$ 在 $(4,+\infty)$ 上是减函数，在 $(-\infty,4)$ 上是增函数

原因分析：未注意 $u>0$

正确解法：由已知得 $x^2-8x+7>0$ $\therefore x\in(-\infty,1)\cup(7,+\infty)$ 且 $u=x^2-8x+7$ 在 $(-\infty,1)$ 上是减函数，在 $(7,+\infty)$ 上是增函数，所以，函数 $f(x)=\log_{0.5}(x^2-8x+7)$ 在 $(-\infty,1)$ 上是增函数，在 $(7,+\infty)$ 是减函数。

对策：求函数 $y=f[g(x)]$ 的单调性，用“同增异减”规律进行判断，特别注意函数 $y=f(u)$ 的定义域 M 与函数 $u=g(x)$ 的值域 D 之间的关系是 $D\subseteq M$。

参考文献：

[1] 全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）数学　人民教育出版社

[2]《数学题组教学法的理论与实践》　张全信　编著　石油大学出版

[3]《2018 年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明》