Educational and teaching research, 教育教学研究(8)2021,3
ISSN: 2705-1277(Online); 2737-4130(Print)

近似U型标准杨表计数公式

付 尧[1] 姜淞水[2]
1. 东北大学理学院 辽宁省沈阳市 110004
2. 东北大学理学院 辽宁省沈阳市 110004

摘 要： 本文研究了右下角缺失的U型标准杨表的计数问题，主要运用了服从U（0，1）均匀分布的嵌套顺序统计量的相关知识，在计算过程中，利用了几类多重积分的计算以及组合恒等式等方法，在第二节中给出了$\left((m+2)^k, m+1\right) \setminus (m^k, m-1) \ \{1,2\}$型标准杨表的计数公式.
关键词： 标准杨表；嵌套顺序统计量；多重积分；组合数

Approximate U standard Yang counting formula

Fu Yao[1], Jiang Song water[2]
1. School of Science, Northeastern University, Shenyang City, Liaoning Province 110004
2. School of Science, Northeastern University, Shenyang City, Liaoning Province 110004

Abstract: In this paper,we consider the enumeration of standard Young tableaux of approximate U-shaped with the missing lower right corner.The enumeration representations of the SYT of $\left((m+2)^k, m+1\right) \setminus (m^k, m-1) \mid \{1,2\}$ are obtained in section 2 by using the properties of nested order statistics which follow the uniform distribution of U(0,1) and the methods of combined constants.
Keywords: standard Young tableaux; nested order statistics;multiple integrals; combination number.

1 引言

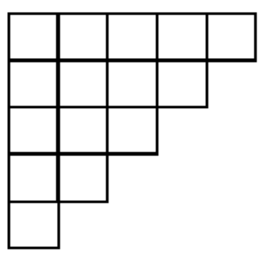
标准杨表是组合计数理论的重要课题，在组合数学中具有很重要的地位，杨表计数涉及许多学科知识，如概率论与数理统计、数学分析、组合数学等.国内外学者对一些不同类型的杨表计数问题进行了大量的研究.[1]中给出了计算标准杨表的钩长公式，Ping Sun在[2-4]中研究了中空型以及截断型杨表的经验公式.本文主要研究了右下角缺失的近似U型标准杨表的计数，此时该杨表中的变量产生了许多不确定的大小关系，具有一定的研究价值.

在具体问题的研究之前，我们先来了解一下关于杨表的相关知识及理论应用.

定义1.1[5] 如果正整数n满足$n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k\,(k\geq 1)$其中$\lambda_i>0\,(1\leq i\leq k)$且$\lambda_i$为整数.我们称n是由k个正整数组合而成的，而$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$是正整数n的k分拆，$\lambda_i$在这里被称作该分拆的分部量.

借助Ferrers diagram来研究分拆是一个常用的方法，我们先来了解一下什么是Ferrers diagram.

定义1.2[5] 设$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$是n的一个分拆，其中$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_k$将n个单元格左对齐排列，如果从上向下第$i\,(i=1,2,\cdots,k)$行刚好由$\lambda_i$个单元格组成，就称这种表格为分拆λ的Ferrers diagram，这里我们记为$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$型Ferrers diagram或λ型Ferrers diagram.符号(i,j)表示Ferrers diagram中从上向下数第i行、从左向右数第j列的单元格.例如，我们考虑15的分拆$(5,4,3,2,1)$，则$(5,4,3,2,1)$型Ferrers diagram如下图所示：



作者简介：付尧（1998-），女，满族，辽宁省兴城市，东北大学理学院2020级在读硕士研究生，主要研究方向：概率论与数理统计，E-mail：2000105@stu.neu.edu.cn。

ISSN: 2705-1277(Online); 2737-4130(Print)

容易知道，当n的一个Ferrers diagram已给出时，它对应的分拆就已经唯一确定了，我们可以逆推出它对应的n的分拆，换句话说，n的分拆与该分拆的Ferrers diagram是一一对应关系.

定义 1.3[5]　我们向λ型Ferrers diagram的每一个单元格都填入一个正整数，这些正整数满足从上向下严格递增，从左向右非严格递增，我们将这种表格称作λ型半标准Young tableau.如果将$\{1,2,\cdots,n\}$这n个正整数一一映射到Ferrers diagram中，映射规则是单元格从上向下、从左向右都严格递增，我们得到的表格称作Standard Young tableau.

下面以10的分拆$(5,4,1)$来解释一个$(5,4,1)$型半标准杨表和一个$(5,4,1)$型标准杨表，分别如下图所示：

1	2	4	7	8
3	5	6	9	
10				

1	2	4	4	8
3	5	6	9	
10				

在计算嵌套多重积分的过程中，会用到Beta函数的性质，因此下面给出Beta函数的相关知识.

定义 1.4[6]　对任意的实数a，b>0，

$$B(y;a,b)=\int_0^y x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

称该函数为不完全Beta函数，当y=1时，上式化为Beta函数.

定义 1.5[6]　正则Beta函数：

$$I_y(a,b)=\frac{B(y;a,b)}{B(a,b)}$$

当a，b是整数时，

$$I_y(a,b)=\sum_{t=a}^{a+b-1}\frac{(a+b-1)!}{t!(a+b-1-t)!}y^t(1-y)^{a+b-1-t}$$

引理 1.6[7]　二阶求和公式：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{r_1+n-1-i}{r_1-1}\binom{r_2+i-1}{r_2-1}=\binom{r_1+r_2+n-1}{r_1+r_2-1}$$

2　$\left((m+2)^k,m+1\right)\setminus\left(m^k,m-1\right)$　$\{1,2\}$型杨表计数

在[8]中已经证明了当变量为服从均匀分布U（0，1）的顺序统计量时，可以利用嵌套顺序统计量求多重积分的方法来计算标准杨表计数问题，并给出了标准杨表的计数公式.

引理2.1[1]

形状为λ的标准杨表的计数公式为

$$H_\lambda=|\lambda|!Vol(S_\lambda)$$

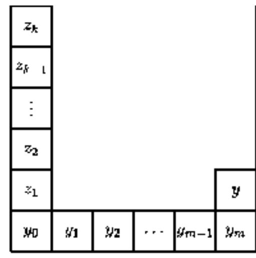
其中$Vol(S_\lambda)$表示λ型标准杨表所对应的嵌套单形(积分区域)的体积.

在本节中，我们将给出$\left((m+2)^k,m+1\right)\setminus\left(m^k,m-1\right)$　$\{1,2\}$型标准杨表的计数公式。根据引理2.1我们知道该形状的标准杨表计数公式为

$$H_{((m+2)^n,m+1)\setminus(m^k,m-1)|\{1,2\}}=|\lambda|!Vol(S_\Omega)$$
$$=(m+2k+2)!\int_{S_\lambda}\cdots\int dS_\lambda=(m+2k+2)!I$$

因此，标准杨表计数问题转化为求解积分I，I为对该嵌套单形的多重积分.

$\left((m+2)^k,m+1\right)\setminus\left(m^k,m-1\right)$　$\{1,2\}$型标准杨表如下图所示：



接下来对上述标准杨表图形进行讨论，变量y的存在使该多重积分的计算变得困难，因此，我们首先需要对y的取值进行讨论，将其分为以下四种情形：

（1）$z_1<y<y_0$

（2）$y_{i-1}<y<y_i, 1\le i\le m$

（3）$y<x_k$

（4）$x_{j+1}<y<x_j, 1\le j\le k-1$

分别对每种情况下的图形进行等价变形，然后对每个图形的积分区域进行划分，将其划分为几个较简单的积分区间进行计算，并利用几个已知的多重积分结果进行求解，从而计算出积分I.

定理2.2

$\left((m+2)^k,m+1\right)\setminus\left(m^k,m-1\right)$　$\{1,2\}$近似U型标准杨表的计数公式为：

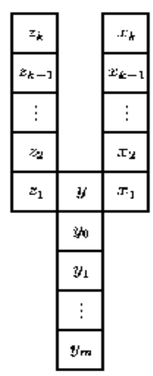
$$H_{((m+2)^n,m+1)\setminus(m^k,m-1)|\{1,2\}}$$
$$=(2m+3)\left[\binom{m+2k+2}{k}-\binom{m+2k+2}{k-1}\right]+\binom{m+2k+1}{k}$$
$$-\binom{m+2k+1}{k+1}+\binom{m+2k+1}{k-2}-\binom{m+2k+1}{k-1}+\binom{2k}{k+1}-\binom{2k}{k}$$

3　证明过程

根据y的取值，我们将I的计算过程分为四个步骤，因此$I=\sum_{i=0}^{m}I_1(i)-\sum_{j=1}^{k}I_2(j)$

3.1 当i=0时，有$z_1<y<y_0$

因为标准杨表中的数满足从上向下、从左向右分别递增，所以该情形下的标准杨表计数 问题的等价变形如右图所示：



记$I_1(0)=\int_{S_1(0)}\cdots\int dS_1(0)$，其中$S_1(0)$

为积分区域.

接下来对上述积分区域进行积分，通过拆分积分区域的方法可以将其化为几个较为简单的积分区间进行计算，我们将积分化为以下两部分：

（1）首先对$y_0, y_1, \ldots, y_m$进行积分，积分区域为：$\Omega_1 = \{y < y_0 < \cdots < y_m < 1\}$

（2）接下来对$z_k; z_{k-1}; \ldots, z_1, y, x_k; x_{k-1}; \ldots, x_1$进行积分，积分区域为：

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0< z_k < z_{k-1} < \cdots < z_2 < z_1 \\ & & & & \wedge \\ \wedge & \wedge & & \wedge & y \\ & & & & \wedge \\ x_k < x_{k-1} < \cdots < x_2 < x_1 < 1 \end{array} \right\}$$

对上述两个积分区域积分，则

$$I_1(0) = \int_{S_1(0)} \cdots \int 1 dz_1 \cdots dz_k dx_1 \cdots dx_k dy dy_0 \cdots dy_m$$

$$= \int_{\Omega_1} \cdots \int dy_0 \cdots dy_m \int_{\Omega_2} \cdots \int dz_1 \cdots dz_k dy dx_1 \cdots dx_k$$

$$= \frac{(1-y)^{m+1}}{(m-1)!} \int_{\Omega_2} \cdots \int dz_1 \cdots dz_k dy dx_1 \cdots dx_k$$

对于Ω_2部分的积分，我们将嵌套多重积分拆成多个二重积分进行计算：

（1）首先对x_k积分，积分区间为$z_k < x_k < x_{k-1}$，则

$$\int_{\Omega_2} \cdots \int dz_1 \cdots dz_k dy dx_1 \cdots dx_k$$

$$= \int \cdots \int \begin{vmatrix} 1 & z_k \\ 1 & x_{k-1} \end{vmatrix} dz_1 \cdots dz_k dy dx_1 \cdots dx_{k-1}$$

（2）接下来对按照$z_k; x_{k-1}$的顺序积分，积分区间为$0 < z_k < z_{k-1} < x_{k-1} < x_{k-2}$，则

$$\int_{z_{k-1}}^{x_{k-2}} dx_{k-1} \int_0^{z_{k-1}} \begin{vmatrix} 1 & z_k \\ 1 & x_{k-1} \end{vmatrix} dz_k$$

$$= \begin{vmatrix} \int_0^{z_{k-1}} 1 dz_k & \int_0^{z_{k-1}} z_k dz_k \\ \int_{z_{k-1}}^{x_{k-2}} 1 dx_{k-1} & \int_{z_{k-1}}^{x_{k-2}} x_{k-1} dx_{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_{k-1} & \frac{z_{k-1}^2}{2} \\ x_{k-2} - z_{k-1} & \frac{x_{k-2}^2 - z_{k-1}^2}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_{k-1} & \frac{z_{k-1}^2}{2} \\ x_{k-2} & \frac{x_{k-2}^2}{2} \end{vmatrix}$$

（3）以此类推，依次对$z_k, x_{k-1}, \ldots, z_2, x_1$积分，则

$$\int_{\Omega_2} \cdots \int dz_1 \cdots dz_k dy dx_1 \cdots dx_k$$

$$= \iiiint_{0<z_2<z_1<y<x_1<1} \begin{vmatrix} \frac{z_2^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{z_2^{k-1}}{(k-1)!} \\ \frac{x_1^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{x_1^{k-1}}{(k-1)!} \end{vmatrix} dz_2 dz_1 dy dx_1$$

$$= \iiint_{0<z_1<y<x_1<1} \begin{vmatrix} \frac{z_1^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{z_1^k}{k!} \\ \frac{x_1^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{x_1^{k-1}}{(k-1)!} \end{vmatrix} dz_1 dy dx_1$$

$$= \iint_{0<z_1<y<1} \begin{vmatrix} \frac{z_1^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{z_1^k}{k!} \\ \frac{1-y^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{1-y^k}{(k-1)!} \end{vmatrix} dz_1 dy$$

（4）最后对z_1, y积分，则

$$I_1(0) = \iint_{0<z_1<y<1} \begin{vmatrix} \frac{z_1^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{z_1^k}{k!} \\ \frac{1-y^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{1-y^k}{k!} \end{vmatrix} \frac{(1-y)^{m+1}}{(m+1)!} dz_1 dy$$

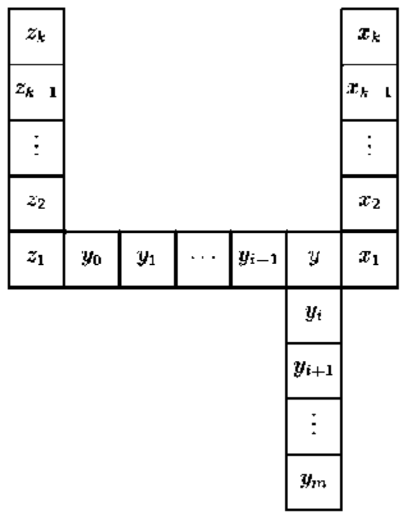
$$= \iint_{0<z_1<y<1} \frac{z_1^{k-1}}{k!(k-1)!} \frac{(1-y)^{m+1}}{(m+1)!} dz_1 dy - \iint_{0<z_1<y<1} \frac{z_1^{k-1} y^k}{k!(k-1)!} \frac{(1-y)^{m+1}}{(m+1)!} dz_1 dy$$

$$- \iint_{0<z_1<y<1} \frac{z_1^k}{k!(k-1)!} \frac{(1-y)^{m+1}}{(m+1)!} dz_1 dy + \iint_{0<z_1<y<1} \frac{z_1^k y^{k-1}}{k!(k-1)!} \frac{(1-y)^{m+1}}{(m+1)!} dz_1 dy$$

$$= \frac{\binom{m+2k+2}{k} - \binom{m+2k+2}{k-1} + \binom{2k}{k+1} - \binom{2k}{k}}{(m+2k+2)!}$$

3.2 当$y_{i-1} < y < y_i 1 \le i \le m$时

此时标准杨表计数问题等价变形如下图所示：



记$I_1(i) = \int_{S_1(i)} \cdots \int dS_1(i)$，其中$S_1(i)$为积分区域.

接下来对上述积分区域进行积分，方法同上，将积分区域划分为几个较为简单的积分进行计算，因此，我们将积分区域划分为以下三个部分：

（1）首先对$y_0, y_1, \ldots, y_{i-1}$进行积分，积分区域为：$\Omega_1 = \{z_1 < y_0 < \cdots < y_{i-1} < y\}$

（2）接下来对$y_i, y_{i+1}, \ldots, y_m$进行积分，积分区域为：$\Omega_2 = \{y < y_i < \cdots < y_m < 1\}$

（3）最后对$z_k; z_{k-1}; \ldots, z_1, y, x_k; x_{k-1}; \ldots, x_1$进行积分，积分区域为：

$$\Omega_3 = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0< z_k < z_{k-1} < \cdots < z_2 < z_1 \\ & & & & \wedge \\ \wedge & \wedge & & \wedge & y \\ & & & & \wedge \\ x_k < x_{k-1} < \cdots < x_2 < x_1 < 1 \end{array} \right\}$$

Educational and teaching research, 教育教学研究(8)2021,3
ISSN: 2705-1277(Online); 2737-4130(Print)

对上述三个积分区域积分，则

$$I_1(i)=\int_{S_1(i)}\cdots\int 1dz_1\cdots dz_k dx_1\cdots dx_k dy dy_0\cdots dy_{i-1}dy_i\cdots dy_m$$

$$=\frac{(y-z_1)^i}{i!}\frac{(1-y)^{m-i+1}}{(m-i+1)!}\int_{\Omega_3}\cdots\int dz_1\cdots dz_k dy dx_1\cdots dx_k$$

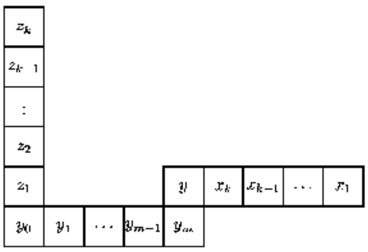
对于Ω_3部分的积分，与第一种情形下Ω_2的部分相同，因此，我们得到

$$I_1(i)=\iint_{0<z_1<y<1}\frac{(y-z_1)^i}{i!}\frac{(1-y)^{m-i+1}}{(m-i+1)!}\begin{vmatrix}\frac{z_1^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{z_1^k}{k!}\\ \frac{1-y^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{1-y^k}{k!}\end{vmatrix}dz_1dy$$

$$=\frac{\binom{m+2k+2}{k}-\binom{m+2k+2}{k-1}+\binom{2k+i}{k-1}-\binom{2k+i}{k}}{(m+2k+2)!}$$

3.3 当j=1时，有$y<x_k$

此时标准杨表计数问题等价变形如下图所示：



记$I_2(k)=\int_{S_2(k)}\cdots\int dS_2(k)$，其中$S_2(k)$为积分区域.

接下来对上述积分区域进行积分，我们将积分区域划分为以下四个部分：

（1）首先对$y_0,y_1,...,y_{m-1}$进行积分，积分区域为：$\Omega_1=\{z_1<y_0<\cdots<y_{m-1}<y_m\}$

（2）然后对$z_k,z_{k-1},...,z_2$进行积分，积分区域为：$\Omega_2=\{0<z_k<\cdots<z_2<z_1\}$

（3）接下来对$x_k,x_{k-1},...,x_1$进行积分，积分区域为：$\Omega_3=\{y<x_k<\cdots<x_2<x_1<1\}$

（4）最后对z_1,y,y_m进行积分，积分区域为：$\Omega_4=\{0<z_1<y<y_m<1\}$

对上述四个积分区域积分，则

$$I_2(k)=\int_{S_2(k)}\cdots\int 1dz_1\cdots dz_k dx_1\cdots dx_k dy dy_0\cdots dy_m$$

$$=\frac{(y_m-z_1)^m}{m!}\frac{z_1^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(1-y)^k}{k!}\int_{\Omega_4}\cdots\int dz_1dydy_m$$

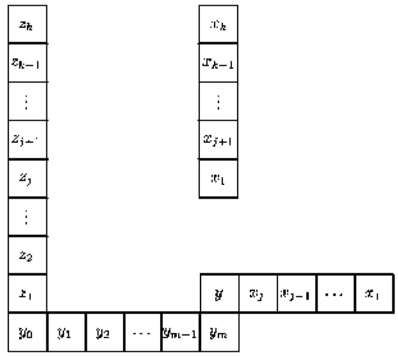
$$=\iint_{0<z_1<y_m}\frac{(y_m-z_1)^m}{m!}\frac{z_1^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(1-z_1)^{k+1}}{(k+1)!}dz_1dy_m$$

$$-\iint_{0<z_1<y_m}\frac{(y_m-z_1)^m}{m!}\frac{z_1^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(1-y_m)^{k+1}}{(k+1)!}dz_1dy_m$$

$$=\frac{\binom{m+k+2}{k+1}-1}{(m+2k+2)!}$$

3.4 当$x_{j-1}<y<x_j\ 1\le j\le k-1$时

此时标准杨表计数问题等价变形如下图所示：



记$I_2(j)=\int_{S_2(j)}\cdots\int dS_2(j)$，其中$S_2(j)$为积分区域.

接下来对上述积分区域进行积分，我们将积分区域划分为以下四个部分：

（1）首先对$y_0,y_1,...,y_{m-1}$进行积分，积分区域为：$\Omega_1=\{z_1<y_0<\cdots<y_{m-1}<y_m\}$

（2）然后对$x_j,x_{j-1},...,x_1$进行积分，积分区域为：$\Omega_2=\{y<x_j<x_{j-1}\cdots<x_1<1\}$

（3）接下来对$z_j,z_{j-1},...,z_2$进行积分，积分区域为：$\Omega_3=\{z_{j+1}<z_j<\cdots<z_2<z_1\}$

（4）最后对$z_k,...,z_{j+1},x_k,...,x_{j+1},y,y_m$进行积分，积分区域为：

$$\Omega_4=\left\{\begin{array}{l}0<z_k<z_{k-1}<\cdots<z_{j+1}<z_1\\ \quad\ \wedge\quad\ \ \wedge\qquad\quad\ \wedge\quad\ \wedge\\ \quad x_k<x_{k-1}<\cdots<x_{j+1}<y<y_m<1\end{array}\right\}$$

对上述四个积分区域积分，则

$$I_2(j)=\int_{S_2(j)}\cdots\int 1dz_1\cdots dz_k dx_1\cdots dx_k dy dy_0\cdots dy_m$$

$$=\frac{(y_m-z_1)^m}{m!}\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{(z_1-z_{j+1})^{j-1}}{(j-1)!}\int_{\Omega_4}\cdots\int dx_{j+1}\cdots dx_k dz_{j+1}\cdots dz_1 dz_k dy dy_m$$

其中Ω_4部分的积分，同样按照先化为二重积分，在利用行列式积分的方法，通过先对$x_k,z_k,x_{k-1},...,z_{j+2},...,x_{j+1}$积分，得到

$$I_2(j)=\iiiint_{0<z_{j+1}<z_1<y<y_m<1}\frac{(y_m-z_1)^m}{m!}\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{(z_1-z_{j+1})^{j-1}}{(j-1)!}\begin{vmatrix}\frac{z_{j+1}^{k-j-1}}{(k-j-1)!} & \frac{z_{j+1}^{k-j}}{(k-j)!}\\ \frac{y^{k-j-1}}{(k-j-1)!} & \frac{y^{k-j}}{(k-j)!}\end{vmatrix}dz_{j+1}dz_1dydy_m$$

$$=I_2^{(1)}(j)-I_2^{(2)}(j)$$

其中，

$$I_2^{(1)}(j)=\iiiint_{0<z_{j+1}<z_1<y<y_m<1}\frac{(y_m-z_1)^m}{m!}\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{(z_1-z_{j+1})^{j-1}}{(j-1)!}\frac{z_{j+1}^{k-j-1}y^{k-j}}{(k-j-1)!(k-j)!}dz_{j+1}dz_1dydy_m$$

$$I_2^{(2)}(j)=\iiiint_{0<z_{j+1}<z_1<y<y_m<1}\frac{(y_m-z_1)^m}{m!}\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{(z_1-z_{j+1})^{j-1}}{(j-1)!}\frac{z_{j+1}^{k-j}y^{k-j-1}}{(k-j-1)!(k-j)!}dz_{j+1}dz_1dydy_m$$

我们首先求解$I_2^{(1)}(j)$这个积分.

$$I_2^{(1)}(j)=\iiint\limits_{0<z_1<y<y_m<1}\frac{(y_m-z_1)^m}{m!}\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{z_1^{k-1}y^{k-j}}{(k-j)!(k-1)!}dz_1dydy_m$$

$$=\iint\limits_{0<z_1<y<1}\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{z_1^{k-1}y^{k-j}}{(k-j)!(k-1)!}\frac{(1-z_1)^{m+1}-(y-z_1)^{m+1}}{(m+1)!}dz_1dy=I_a-I_b$$

其中,

$$I_a=\iint\limits_{0<z_1<y<1}\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{z_1^{k-1}y^{k-j}}{(k-j)!(k-1)!}\frac{(1-z_1)^{m+1}}{(m-1)!}dz_1dy$$

$$=\int_0^1\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{y^{k-j}}{(k-j)!}dy\int_0^y\frac{z_1^{k-1}}{(k-1)!}\frac{(1-z_1)^{m+1}}{(m-1)!}dz_1$$

$$=\int_0^1\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{y^{k-j}}{(k-j)!}dy\frac{B(y;k,m+2)}{(k-1)!(m+1)!}$$

$$-\int_0^1\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{y^{k-j}}{(k-j)!}dy\frac{I_y(k,m+2)\cdot B(k,m+2)}{(k-1)!(m-1)!}$$

$$=\sum_{t=k}^{m+k+1}\frac{\binom{k+t-j}{t}\binom{m+k+j+1-t}{j}}{(m+2k+2)!}$$

$$I_b=\iint\limits_{0<z_1<y<1}\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{z_1^{k-1}y^{k-j}}{(k-j)!(k-1)!}\frac{(y-z_1)^{m-1}}{(m+1)!}dz_1dy$$

$$=\int_0^1\frac{(1-y)^j}{j!}\frac{y^{m-2k-j+1}}{(k-j)!(m+k+1)!}dy=\frac{\binom{m+2k-j+1}{k-j}}{(m-2k+2)!}$$

因此,

$$I_2^{(1)}(j)=I_a-I_b=\frac{\sum_{t=k}^{m+k+1}\binom{k+t-j}{t}\binom{m+k+j+1-t}{j}-\binom{m+2k-j+1}{k-j}}{(m+2k+2)!}$$

同理可以求出

$$I_2^{(2)}(j)=\frac{\sum_{t=k+1}^{m+k+2}\binom{k+t-j-1}{t}\binom{m+k+j+2-t}{j}-\binom{m+2k-j+1}{k-j-1}}{(m+2k+2)!}$$

故

$$I_2(j)=I_2^{(1)}(j)-I_2^{(2)}(j)=\frac{\left\{\sum_{t=0}^{m+1}\binom{m+j+1-t}{j}\left[\binom{2k+t-j}{k+t}-\binom{2k-t-j}{k+t+1}\right]\right\}}{(m+2k-2)!}+$$
$$\frac{\binom{m+2k-j-1}{k-j-1}-\binom{m+2k-j-1}{k-j}}{(m+2k-2)!}$$

3.5求和

综上所述,

$$I=I_1(0)+\sum_{i=1}^{m}I_1(i)+\sum_{j=1}^{k-1}I_2(j)+I_2(k)=\sum_{i=0}^{m}I_1(i)+\sum_{j=1}^{k-1}I_2(j)+I_2(k)$$

其中,

$$\sum_{i=0}^{m}I_1(i)=\sum_{i=0}^{m}\frac{\binom{m+2k+2}{k}-\binom{m-2k+2}{k-1}+\binom{2k-i}{k-1}-\binom{2k+i}{k}}{(m+2k+2)!}$$

$$=\frac{(m+1)\left[\binom{m+2k+2}{k}-\binom{m+2k+2}{k-1}\right]+\sum_{i=0}^{m}\left[\binom{2k+i}{k-1}-\binom{2k+i}{k}\right]}{(m+2k+2)!}$$

$$=\frac{(m+1)\left[\binom{m+2k+2}{k}-\binom{m+2k+2}{k-1}\right]+\binom{m+2k+1}{k}-\binom{m+2k+1}{k+1}+\binom{2k}{k+1}-\binom{2k}{k}}{(m+2k+2)!}$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}I_2(j)+I_2(k)$$

$$=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\left\{\sum_{t=0}^{m+1}\binom{m-j+1-t}{j}\left[\binom{2k+t-j}{k+t}-\binom{2k+t-j}{k+t+1}\right]\right\}+\binom{m+2k-j+1}{k-j-1}-}{(m+2k+2)!}$$

$$\frac{\binom{m+2k-j-1}{k-j}+\binom{m+k+2}{k+1}-1}{(m+2k+2)!}$$

$$=\frac{\sum_{t=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{k}\binom{m+j+1-t}{j}\binom{t+2k-j}{t+k}-\sum_{t=0}^{m+1}\binom{m+k+1-t}{k}}{(m+2k+2)!}$$

$$-\frac{\sum_{t=0}^{m+1}\sum_{j=1}^{k-1}\binom{m+j+1-t}{j}\binom{t+2k-j}{t-k+1}}{(m+2k+2)!}$$

$$+\frac{\sum_{j=1}^{k-1}\binom{m+2k-j+1}{k-j-1}-\sum_{j=1}^{k-1}\binom{m+2k-j+1}{k-j}-\binom{m+k+2}{k+1}-1}{(m+2k+2)!}$$

$$=\frac{(m+2)\left[\binom{m+2k+2}{k}-\binom{m+2k+2}{k-1}\right]-\binom{m+k+2}{k+1}}{(m+2k+2)!}$$

$$+\frac{\binom{m+2k+1}{m+k+3}-\binom{m+2k+1}{m+k+2}+\binom{m+k-2}{k+1}}{(m+2k+2)!}$$

$$=\frac{(m+2)\left[\binom{m+2k+2}{k}-\binom{m+2k+2}{k-1}\right]+\binom{m+2k+1}{m+k+3}-\binom{m+2k+1}{m+k+2}}{(m+2k+2)!}$$

整理一下求和结果，我们可以得到$\left((m+2)^k,m+1\right)\setminus(m^k,m-1)|\{1,2\}$型标准杨表的计数公式为:

$$H_{((m+2)^k,m+1)\setminus(m^k,m-1)|\{1,2\}}=(m+2k+2)!I$$

$$=(2m+3)\left[\binom{m-2k+2}{k}-\binom{m+2k-2}{k-1}\right]+\binom{m+2k+1}{k}$$
$$\binom{m+2k+1}{k+1}+\binom{m+2k+1}{k-2}-\binom{m+2k+1}{k-1}+\binom{2k}{k+1}-\binom{2k}{k}$$

参考文献:

[1] J.S.Frame,G.de B.Robinson,R.M. Thrall.The hook graphs of the symmetric group[J].Math.6 (1954) 317 - 324.

[2] Sun P.Evaluating the Numbers of some Skew Standard Young Tableaux of Truncated Shapes[J].The Electronic Journal of Combinatorics,2015, 22(1).

[3] Sun P.Three enumeration formulas of standard Young tableaux of truncated shapes[J].Quaestiones Mathematicae,2018,42:1–15.

[4] Sun P.Enumeration formulas for standard Young tableaux of nearly hollow rectangular shapes[J].Discrete Mathematics, 2017:S0012365X17303448.

[5] Fulton W.Young tableaux:with applications to representation theory and geometry.Cambridge University Press,1997.

[6]周占杰.(2009).伽玛函数和贝塔函数在概率统计中的应用.电大理工,000(001)，59–62.

[7] H.W.Gould.Combinatorial Identities:Table I:Intermediate Techniques for Summing Finite Series.Jocelyn Quaintance,2010.

[8] Ping S.The application of order statistics to multiple integration over a canonical simplex[J].Statistics \& Probability Letters,2012, 82(9).