

三角函数最值问题的解题分析

王二林

(扬州市仙城中学, 江苏扬州 225200)

摘要:三角函数是高中数学教学的一项重要内容,也为高考的重要考点。目前来看,部分同学在三角函数学习过程中还存在很多问题,如对三角函数概念不清晰、计算法则不理解、题型把握不准等,给学生的学习带来很大影响。基于此,本文以三角函数为切入点,探讨三角函数最值的解法,以期帮助学生突破三角函数解题大关,促进学生综合学习能力提升。

关键词:三角函数;最值问题;解题策略

三角函数被定义为包含这个角的直角三角形两个边的比值,当然也可以在同等情况下,等价的定义为半径为1的圆上的各种线的长度。作为高考的重要考点,其在高中数学教学中占有一席之地。客观来讲,三角函数是一种特殊函数,与二元一次函数有相似之处,即有相应的对称轴、存在最值。因此,在三角函数教学中,我们也可引入学生熟悉的内容,在此基础上帮助学生搭建理解数学知识的桥梁。同时,探究三角函数最值对于提高学生的逻辑思维能力、突破三角函数学习大关有重要作用。当然,三角函数最值求法也是一个教学难点,在此过程中学生要根据实际情况调整解题思路,逐步把握三角函数学习要点,通过这种方式也能提高自身的综合应用能力。

解决三角函数最值问题过程中,部分学生对三角函数的相关概念不理解,在解决实际问题过程中遇到了很大的难题。基于此,我们要改变以往的教学策略,将重心放到解题方法上,引导学生思考解题方法,通过这种方式也能助力学生数学思维的培养。客观来讲,数学作为一门理科,其逻辑性比较强,对学生综合能力的提升有重要帮助。新时代背景下,我们要改变以往的教学思路,将重心放到学生逻辑思维能力的培养方面,使学生能够把握三角函数的学习要领,进一步突破学习困境。从另一个角度来看,三角函数也是一种特殊函数,与其他函数最值求法相似,在求解过程中,学生也可转换以往的学习思路,将其转化为自己熟悉的函数,比如,二次函数,通过这种方式也能降低学生的学习难度,使学生从多个角度思考三角函数的内涵。同时,上述方式也能助力学生空间想象能力、思维能力的培养,也能使学生将理论与实践衔接起来,有利于帮助学生掌握更多的理论知识,同时也便于提高学生的综合实践能力。

一、求解三角函数最值的常见方法

三角高数最值求法不是一成不变的,要根据题目信息及学生的实际学习能力为学生筛选适合的解题方法。在实际解题过程中,我们发现部分学生的思维比较局限,将重心放到了单一思路的解题上,不注重拓展解题方法,也未联动多种解题方法,常常陷入解题困境,对于学生个性发展有不利影响。总体来看,在三角函

数解题过程中,往往需要联合使用多种方法,通过这种方法也能将大问题转化为小问题,降低学生解决实际问题的难度。同时,我们也要改变以往的教学方法,通过配置疑问激发学生的探究激情,使学生深入理解三角函数的相关内容,通过这种方式也能全面调动学生的解题信心,对于学生逻辑思维能力的培养也有重要意义。本文着重从以下几点论述三角函数最值的求法:

(一)换元法

换元法是三角函数最值求解过程中常用的方法,通过换元法能够降低数学问题的解题难度,这种情况下也能助力学生思维的发展,对学生综合学习能力的提升也有重要帮助。同时,换元法应用过程中也要结合实际情况,学生要先观察题目中的式子,思考其是否适用换元法解题,同时,换元法应用过程中,学生也要联想熟悉的函数,如二元函数,思考原式是否能转换为二次函数?通过长期的观察总结,学生发现一般情况下含有 $\sin x + \cos x$ 或者 $\sin x \cos x$ 时,可利用换元法求函数的最值。以例题 $(\sin x + \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x \cos x$ 时,就可以采用换元法,将这一式子转化为二次函数的形式,通过这种方式也能降低解题难度,提升学生的解题信心。

【例题1】已知函数 $y = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$, 求这一函数值的取值范围。

【例题分析】针对这一问题,学生可从原式入手,观察原式是否能转化为自己以前学过的函数?或者学生也可转化思路,思考原函数与二次函数是否有相似之处?如何将其转化为二次函数?从学生熟悉的知识点入手能够帮助学生找到解决问题的思路,同时也能促进学生逻辑思维能力的培养。

【解题过程】原式中,我们可以引入一个函数 t , 令这一函数为 $\sin x + \cos x$, 根据正弦函数与余弦函数性质可知整个函数的值域在 $-\sqrt{2} - \sqrt{2}$ 之间,包含这两个值。紧接着,学生可求 t^2 的值,在此基础上正确表示 $\sin x \cos x$ 的值,一般情况下,相关数值为 $(t^2 - 1)/2$, 将其与原式整合起来就得到了 y 与 t 的关系式,即 $y = 1/2 t^2 + t + 1/2$, 经整理后得 $y = 1/2 (t + 1)^2$, 通过上述分析已知 t 的取值范围,那么 y 的取值范围也能很快确定,最终得出 y 的取值范围为 $[0, (3 + 2\sqrt{2})/2]$ 。

【习题评价】应用换元法能够使将题目中的已知信息与未知信息联系起来, 这种情况下也有利于提高学生的综合解题能力。同时, 换元中涉及很多的隐含信息, 对于学生确定新函数的值域也有重要作用。对此, 在三角函数最值求解过程中, 可借助换元法解题, 通过这种方式也能提高学生的综合学习能力。

(二) 数形结合法

【例题2】已知函数 $y = -\sin x / (2 - \cos x)$, 该函数的定义域为 $(0, \pi)$, 求这一函数的最小值。

【例题分析】三角函数为一种特殊函数, 通过总结概括相关知识学生能够明确 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 基于这一点, 学生在实际解题过程中可从函数图形入手思考相关问题, 例如, 学生可以在单位圆上任意选一点, 将这一点设为 $(\cos x, \sin x)$, 在此基础上结合题目信息引导学生解决实际问题。

【解题过程】在实际解题过程中, 学生可将原有函数进行适当变化, 将原式转化为 $y = (0 - \sin x) / (2 - \cos x)$, 在此基础上, 这一函数也转变成了求两点之间连线所形成直线的斜率, 这两点坐标分别为 $(2, 0)$ 、 $(\cos x, \sin x)$, 通过分析两个点在坐标轴中的实际位置, 我们可以发现点 $(\cos x, \sin x)$ 是单元为 1 的圆的上半圆, 那么求原函数的最小值也转化成了求这个半圆上的最小直线斜率。

在实际求解过程中, 学生可将过点 A $(0, 2)$ 的切线与半圆半径相切, 且点为点 B, 那么原函数的取值范围大于等于 LAB 的斜率, 小于 0。结合上述内容能够求出直线 AB 的斜率为 $\tan 5\pi$, 结合题目中的已知条件能够求出直线的斜率, 为 $\sqrt{3}/3$, 这种情况下也能求出原函数的最小值, 为 $-\sqrt{3}/3$, 这时的 x 取值为 $\pi/3$ 。

【习题评价】数形结合法是三角函数最值求解的重要方法, 借助这种方式能够降低学生的解题难度, 同时也能促进学生综合学习能力提升。通过上述习题的引入也能锻炼学生的思维, 使其由数到形, 逐步拓宽自身的解题思路, 获得多元化的解题思路, 逐步突破三角函数求值困境。

(三) 配方法

【例题3】已知函数 $y = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1$, x 取值为全集, 求这一函数的最值。

【习题分析】配方法也是求三角函数最值的重要方法, 借助这一方法也能简化解题难度。

【解题过程】在上述函数最值求解过程中, 可采用配方法, 可结合所学知识将原式转化为 $y = -\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 2$, 在此基础上能够应用配方法解决实际问题, 上述式子经配方法处理得 $y = -[\sin x - \sqrt{3}/2]^2 + 11/4$, 这种情况下也能快速求出函数的取值范围。

【习题评价】配方法在求解三角函数最值中有重要作用, 假如函数中仅含有正弦函数或余弦函数, 且它们是 2 次方时, 就需

要通过换元或者配方将原函数转化为二次函数求最值的方法。

二、三角函数最值解题的注意事项

三角函数最值求解过程中, 部分学生没有正确的解题思路, 且对概念也没有清晰的认识, 这种情况下容易加大学生解题的盲目性, 对于学生综合能力的发展也有重要作用。在实际教学过程中, 教师要引导学生转换思考问题的角度, 将有难度的知识转化为熟悉的知识, 降低解题难度的同时也能提升学生的解题信心。其次, 针对部分知识接受能力、建模能力比较差的学生来说, 其更习惯于借助已有知识解决实际问题, 在一些抽象的知识解题过程中存在很多问题, 这也导致部分学生陷入了解题困境。例如, 引导学生借助数形结合方法解题, 将抽象的问题具体化, 也能使解题结果更加浅显易懂, 对于学生综合学习能力的提升也有重要作用。

三、结语

三角函数最值求法是高中数学的一个要点, 新教育背景下, 教师要改变以往的教学思路, 将重心放到实际问题的解决中, 善于应用转化法, 转化教学思路, 找到问题的突破口。与此同时, 学生也要仔细审题, 思考题目中的隐含信息, 在此基础上搭建特定的解题模型, 找到三角函数最值求解的突破口, 逐步解决实际问题。此外, 针对不同学习能力的学生, 我们也可为其布置不同的习题, 逐步引导其探究问题, 通过这种方式也能把握数学学习要领, 熟练应用已知信息解决实际问题, 提高自身解决实际问题的能力, 逐步提升自身的数学核心素养。

参考文献:

- [1] 肖桂宏. 三角函数最值问题的基本题型分析 [J]. 中国高新区, 2018 (11): 98.
- [2] 李倩莹. 浅谈三角函数最值问题的解题策略 [J]. 教育现代化, 2018, 5 (02): 348-349+358.
- [3] 徐厚文. 关于三角函数最值问题的探究 [J]. 科技视界, 2017 (09): 189.
- [4] 杨梅. 三角函数最值问题的解题策略 [J]. 科技资讯, 2015, 13 (33): 134-136.
- [5] 凌广燕. 浅析三角函数最值在解题中的理论与实践思考 [J]. 科技风, 2014 (21): 183.
- [6] 黄雅琴. 中职数学三角函数最值的几种求法 [J]. 赤子 (上中旬), 2014 (13): 172-174.