浅谈数学思想引领下的解题逻辑
——以平面向量的应用为例

陈治利　赵华新
（延安大学数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘要：新高考形势下，解决数学问题要致力于培养学生渗透数学思想和方法的能力，以求构建学生数学核心素养体系。平面向量的知识是高中阶段数学课程的重要组成部分，向量具有几何和代数两种表现形式，融数形于一体，向量自身就是数学思想的具体体现。鉴于此，本文将探究向量蕴含的数学思想，分析数学思想指导下的解题逻辑，提出让学生领悟数学思想的课堂教学策略。

关键词：平面向量；数学思想；解题逻辑；教学策略

一、平面向量的知识性能

向量具有知识和工具双重属性。作为知识，它是代数和几何的研究对象，向量的引入为数学对量的描述开拓新的途径。处于高中阶段的学生，认知能力日渐成熟，纳入新知、升级知识结构体系的意识不断增强，新旧知识的不断更替，且向量本身具有独特的逻辑特性，在提升学生数学素养方面占据优势地位。作为工具，向量可用于“平行和共线问题的转化”“解析几何动点和轨迹”等对逻辑思维要求颇高的数学问题中，既是数学发展进程上新的生机，又为学生滋长创新能力提供养分。此外，应用向量解决问题的过程就是数学建模的过程，向量的引入提升了学生的空间思维能力，促使学生反复参与数学建模全过程，感悟数学建模的魅力，促进学生形成数学核心素养。

二、具体应用中的数学思想和逻辑分析

（一）特殊化数学思想

特殊化数学思想就是解决复杂的一般性数学问题时，先着手处理问题的特殊情况，再把特殊情况得出的结论或解决过程推广到一般问题上，最终得出结果。常见的特殊化途径有：构造特殊的函数、几何图形，确定特殊的点、线、面，找准特殊位置，利用比值、方程等解决问题。

例 1. 已知△ ABC 中，D 是 BC 上一点，且 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，$P$ 是 AD 的中点，G 是△ ABC 的重心，则△ GDP 和△ ABC 的面积之比为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{18}$

1. 题目分析：题中要求△ GDP 和△ ABC 的面积之比，两三角形的边角关系无法直观得到，可直接利用的条件有 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，其余条件具体用处暂不明晰，因此先确定数形结合的思想，将已知标注在图形中，探索点、线、面之间的联系，整理更多可用已知条件，搭建解题逻辑体系。题中涉及到求△ ABC 的面积且已知 G 点为其重心，并没有指定△ ABC 的类型，故利用一般与特殊思想将△ ABC 特殊化为等腰直角三角形，既可以直接计算三角形面积，又可以将重心相关性质转化为已知解题条件，三角形特殊化的过程也是对重心性质的特殊化，拓宽了解决问题的思路。

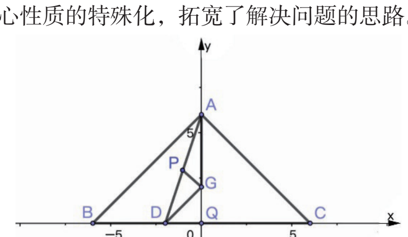

图 1

2. 解题逻辑：假设△ ABC 是等腰直角三角形，△ ABC 的面积利用公式直接求出。再以 BC 边的中点 Q 为原点，BC 边为 x 轴，AQ 为 y 轴建立直角坐标系，如图 1 所示。由 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$ 可以确定 D 点位置，G 为等腰直角三角形的重心，利用“三线合一”和“三角形的重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1”的性质，得出点 G 在 AQ 上且 GQ= $\frac{1}{3}$ AQ，确定 G 点位置。此时，与△ GDP 和△ ABC 相关的点都可以用坐标表示出来，根据需要选择可用的点，再用向量方式求得△ GDP 的面积。

3. 求解过程：设△ ABC 为等腰直角三角形，将 BC 中点记为 Q，如图 2 所示建立直角坐标系，则 A（0，6），D（−2，0），G（0，2），P（−1，3），可得 $\overrightarrow{DP}$ =（1，3），$\overrightarrow{DG}$（2，2）。

$\therefore S_{\Delta GDP}=\frac{1}{2}|1\times2-3\times2|=2$，又 $\because S_{\Delta ABC}=36$，$\frac{S_{\Delta GDP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{18}$ 故选 D。

例 2. 在菱形 ABCD 中，若 AC=4，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ ________

1. 题目分析：题目已知四边形 ABCD 为菱形，对角线 AC=4，已知条件单一，要求得 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值，需要在 AB 与 AC 之间建立联系，探索更多可用条件是首要任务。

2. 解题逻辑：此题要求菱形对角线和一边的数量积，只给出对角线长度，其余未知、经分析在菱形 ABCD 中，求解不出有助解题的角度和其余边长，此时需考虑菱形 ABCD 的特殊形式，“正方形是特殊的菱形”，将菱形 ABCD 转变成正方形，利用正方形“四个角为直角”“对角线相等”“每一组对角线平分一组对角”等相关性质，可以整理出角度、长度等更多已知条件，从而求得数量积。

3. 求解过程：设菱形 $ABCD$ 为正方形，则 $AC=BD=4$，易得 $AB=2\sqrt{2}$，由“$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$”

那么 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{3\pi}{4}=4\times2\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=8$

评析：通过对例 1、例 2 的分析可以得出，数学思想的运用是一个由浅入深、层层递进的过程，数学思想之间具有紧密联系，在解题过程中可以结合多种数学思想分析问题，这是提升数学素养和思维能力的有效方式。尤其是在几何问题上，数形结合可以作为基本元素参与解题，在此基础之上推进其他数学思想的应用，这是将几何问题代数化的基本功，因此在教学过程中教师要注意敦促学生养成“遇几何，先画图”的解题习惯这两个例题都是运用特殊化思想的典例，特殊化思想的内核在于特性、特质，其外延是题干中的已知条件，即与多项已知条件有关联的量才被赋予“特殊”，这个特殊化的量就是解题关键，正如这两例中的“三角形转换为等腰直角三角形”“菱形转换为正方形”，此外，例 2 也可以采用建立直角坐标系，通过设 B 点横坐标为 α，表示出

$\overrightarrow{CA}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 的向量坐标，进行计算时会发现假设的未知数 α 并不影响计算过程和结果，也可解决问题。通常情况下有未知数的介入会增加计算量，但此方法对梳理解题思路、提供解题逻辑有重要作用，所以在解题初始阶段毫无头绪时，可以尝试引入未知量整理解题线索，这也是提升数学思想的手段，但相较于常规方法而言，特殊化思想解题逻辑更加简单便捷、清楚易懂。

（二）函数思想

函数是用来描绘数量关系的，函数思想是运用函数的性质去分析、细化问题从而达到解决问题的一种思维策略。它通过找寻并表述问题的数学特征，以函数关系表达式为通路建立数学模型，从而进行问题的探究。在解题中，要学会利用函数性质（尤其是对二次函数、三角函数、幂函数、指数函数等的具体性质）挖掘出题目隐含条件，构造出函数关系式，找到解题关键。

例 3. 在△ ABC 中，AB=3*AC*=9，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}^2$，点 P 是△ ABC 所在平面内一点，则当 $\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2$ 取得最小值时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________。

1. 题目分析：已知 AB=3*AC*=9，可以直接求的 AB、AC 边长，而所给的向量关系无法直接利用，优先考虑数形结合思想，整理出向量关系中的具体线索。

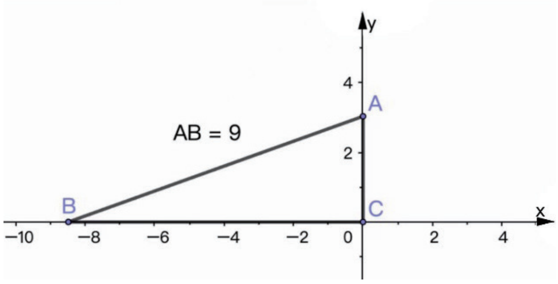

图 2

2. 解题逻辑：在探索平面几何问题时，以数形结合思想为基础，AB、AC 的长度已知，分析向量关系 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}^2$，获得隐含条件，再以特殊化思想为指导，合理建立如图 2 所示的坐标系，找到出 A、B、C 三点坐标，带入限制条件中，P 点坐标未知且无法求得，故假设其坐标为（x，y，将 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$ 表示出来，利用函数思想，表示出已知限定条件的函数解析式，和满足此条件的 P 点的坐标，最终求得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$。

3. 求解过程：以点 C 为坐标原点，直线 CB、CA 分别为 x 轴、y 轴建立直角坐标系，则 A（0，3），B（$6\sqrt{2}$，0），设点 p（x，y）那么：

$$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2=3(x-2\sqrt{2})^2+3(y-1)^2+5$$

∵当 P（$2\sqrt{2}$，1）时，$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2$ 取得最小值

∴ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ （－$2\sqrt{2}$）×（－$6\sqrt{2}$）= 24

评析：例 3 题干中所给已知条件大多是描述向量间关系的，需要利用数形结合思想，理清向量间的数量关系，整理可直接使用的条件。应如何建立直角坐标系，在此题中很有考究，由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}^2$ 可分析出△ ABC 为直角三角形，利用直角三角形的特殊性建立坐标系，表示出各向量坐标，那么题中所给关键限制条件就可以代数化，再利用函数最值相关性质得到满足该条件的 P 点坐标，最终解决问题。总之，解决此题以数形结合思想为基础，利用特殊与一般思想找到“形”的特性，再将“数”融于“形”升华至函数思想，构造函数关系表达式，解题全过程进行了数学思想的综合应用，是一个数学思想的逻辑建构过程。因此，要熟练掌握数学思想的内涵和适用范围，养成以数学思想为指导的解题习惯，便于在解题过程中迅速确定每个阶段需要运用哪种数学思想，找到解题关键。

三、课堂教学策略

数学思想是从知识的应用中提炼出来的，是一套严谨的逻辑思维方式，可以构建成为思想体系，在解决问题时具有广泛适用性，即怀特海所说的普遍原理和原理的应用，也就是说教育培养的人不仅要掌握专门知识更要凝练思想。目前，重知识、轻思想的教学情况依然严重，知识使学生能够理解生活而思想为生活指引方向，是知识的价值体现，在数学教学过程中进行思想渗透的价值不置可否、因此，以向量教学为例，探讨中学向量课堂教学策略。

高中数学教材中向量知识章节较多，内容包含平面向量和空间向量两大部分，其中囊括向量定义、定理、公式、运算等知识，不仅为高中三角函数、几何、复数的学习提供支撑，还为大学的线性代数、解析几何等内容打下基础，重要地位不言而喻。在向量的实际教学中，教师要规避将向量纯粹当成运算工具，片面的展示向量的工具性，笔者现提出以下三种策略可供探讨。

一是，循循善诱，深刻剖析向量的概念本质。以探究式教学策略为指导，教师以探究的方式将向量知识呈现给学生，学生通过自身积极主动参与，在探索中掌握向量的本质概念，获得科学探究的能力和技巧。“提出问题－形成假设－制定方案－分析论证－总结评价”为全过程，教师以问题为驱动，让学生知道向量数形结合特性和如何将几何问题代数化是向量最本质的意义，列举向量解几何来推进教学，让学生提出向量作运算工具的假设，并逐步论证这个假设，获得知识。

二是，情境创设，呈现丰富的数学内涵。结合向量进化史和物理的紧密联系，为学生打造一个奇妙的向量天地，让学生意识到向量知识不是单一的、割裂的知识板块，它具有广泛的适用范围，增添学生学习向量的动力。譬如，让学生从物理中的力的合成类比到向量的加减运算，让学生更新知识结构，拓展知识外延。直观的感受依托物理知识抽象数学概念的过程，锻炼学生逻辑建构能力。

三是，逻辑分析，解题中融入数学思想。在课堂教学过程中，无论是例题讲解还是习题回顾，教师都应当以数学思想为解题指导，去分析和整理解题思路，将思想细化到每一个知识应用步骤，让学生明白数学思想不是理想化的、不切实际的东西，它是从知识的应用中凝练出的产物，源于实践又作用于实践。解题逻辑中融入数学思想的过程，就是在进行理论和实践的有效循环，不断整合数学思想、优化逻辑体系，使解决问题游刃有余。

四、结语

数学思想具有高度概括性和抽象性，学生无法轻易理解思想内涵，只有将其融入数学知识中，随着学生对知识分章节、分层次的学习和掌握，数学思想才慢慢地被学生吸收得以总结升华。若教学过程中没有赋予数学思想，学生对知识的学习是机械的碎片化的，不成体系，体会不到数学知识的关联性和使用价值，导致学生只是盲目追求解题技能的学习，对数学内涵熟视无睹，这样的教学是无效的。因此，数学教学应以渗透数学思想为基准点，展开逻辑分析，使思想和知识相互作用，让学生感悟到数学探索价值，才能促使学生形成数学思维体系，提升数学核心素养。

参考文献：

[1] 相阳 . 高中数学思想方法的渗透研究 [J]. 数学学习与研究，2021（29）：43-44.

[2] 魏琦 . 高中数学向量解题基本思想与技巧分析 [J]. 数学学习与研究，2020（07）：139.