

数学思想在高等代数教学中的应用

程晨 朱秀娟

(南京特殊教育师范学院, 江苏南京 210038)

摘要: 高等代数是大学数学专业的重要基础课程, 其抽象性和逻辑性使得学生在学习过程中面临较大挑战。本文深入探讨了数学思想在高等代数教学中的应用, 分析了抽象化、数形结合、分类讨论、化归等多种数学思想在高等代数知识体系中的体现及具体应用方式。通过实际教学案例, 阐述了这些数学思想如何帮助学生理解抽象概念、掌握解题方法, 进而提高学生的数学思维能力和创新能力。

关键词: 数学思想; 高等代数; 抽象化; 数形结合; 分类讨论

一、引言

高等代数是数学专业的核心课程之一, 包含多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间、双线性函数和辛空间等内容。高等代数不仅构建了现代数学的重要基石, 更为其他学科的理论研究与实际应用提供了不可或缺的数学工具。从微观世界的量子力学, 到宏观的经济运行分析; 从前沿的计算机科学技术, 到传统的工程领域, 高等代数的身影无处不在, 为解决各种复杂问题提供了独特的思路和方法。

学好高等代数的重要性不言而喻, 但由于其高度抽象的理论和严谨的逻辑结构, 学生的应用能力较弱, 要想理解和掌握这门课程并非易事。数学思想是解决数学问题的指导思想和基本策略, 可以加深学生对知识的认知, 训练严谨的数学思维, 有助于建立知识体系的框架。在高等代数教学中渗透数学思想, 能够帮助学生更好地理解课程内容, 提升数学思维能力, 增强运用数学知识解决实际问题的能力, 对培养学生的综合素质和创新精神有着不可忽视的作用^[1]。

二、数学思想在高等代数教学中的重要性

(一) 有助于学生理解抽象概念

高等代数中的许多概念, 如线性空间、线性变换等, 都非常抽象, 学生难以直接理解。数学思想帮助学生搭建理解抽象概念的桥梁, 例如通过数形结合思想, 将向量空间中的向量用几何图形表示, 使学生能够从直观的几何形象中把握向量空间的性质, 从而更好地理解抽象的向量空间概念^[2]。

(二) 提升学生的解题能力

高等代数的题目类型多样, 解题方法灵活。掌握数学思想能够帮助学生从不同角度分析问题, 找到解题的切入点。例如, 化归思想可以将复杂的代数问题转化为简单的、已经熟悉的问题来解决; 分类讨论思想可以针对不同情况进行全面分析, 避免遗漏和错误, 从而提高学生的解题效率和准确性^[3]。

(三) 培养学生的数学思维 and 创新能力

数学思想的学习和应用能够培养学生的逻辑思维、抽象思维、发散思维等多种数学思维能力。在运用数学思想解决高等代数问题的过程中, 学生不断尝试新的思路和方法, 有助于激发创新意识, 培养创新能力, 为今后从事数学研究或其他相关领域的工作奠定坚实的基础^[4]。

三、高等代数中蕴含的主要数学思想及教学应用

(一) 抽象化思想

抽象化是指通过剥离具体数学对象的特殊性, 提取其共有的代数结构和本质属性, 以公理化方法构建一般性理论体系的思维方式。具体方法包括利用定义、引入新的代数结构、进行推广和泛化等^[5]。

以多项式和 n 维向量为例, 多项式的加法和数乘仍是多项式, 且满足以下的八条性质 (其中 k, l 是数域 P 的任意数):

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x); [f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)];$$

$$f(x)+0=f(x); f(x)+[f(x)]=0; lf(x)=f(x); k[lf(x)]=(kl)f(x);$$

$$(k+l)f(x)=kf(x)+lf(x); k[f(x)+g(x)]=kf(x)+kg(x);$$

n 维向量的加法和数乘仍是 n 维向量, 且满足:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha; (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma); \alpha+0=\alpha; \alpha+(-\alpha)=0;$$

$$l\alpha=\alpha; k(l\alpha)=(kl)\alpha; k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta; (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha;$$

多项式和 n 维向量是两类不同的元素, 数域 P 上全体多项式和全体 n 维向量可构成两个非空的集合, 这两个非空集合中的元素有各自定义的加法运算与数乘运算, 但是它们的加法运算都满足交换律、结合律、集合中任意元素加上另一个元素 (记为 β) 等于它本身、集合中的任意元素加上一个元素等于 β ; 数乘运算满足结合律、数字 1 乘上集合中的任意元素等于其本身; 加法与数乘满足分配律。研究的对象不同, 所对应的加法运算与数乘运算也不同, 由多项式和 n 维向量的加法运算与数乘运算满足封闭性和八条规则, 把它抽象为一般的元素, 即是线性空间的定义。

抽象化思想是高等代数的核心特征之一, 通过剥离具体对象的非本质特征 (如多项式与向量加法与数乘运算的差异), 提炼出线性空间的普适性定义, 该抽象化过程不仅深化了理论体系, 更为物理学、计算机科学等领域的模型构建提供了通用框架^[6-7]。

(二) 数形结合思想

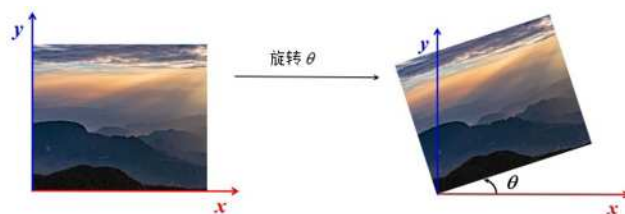
数形结合思想指通过建立代数结构与几何直观之间的对应关系, 利用几何图形解释抽象代数概念, 也可借助代数工具解决几何问题的辩证思维方式。

实例: 线性变换在课本中的定义^[8]: 线性空间 V 的一个变换 σ 称为线性变换, 如果对于 V 中任意的元素 α, β 和数域 P 任意数 k , 都有

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta); \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha);$$

大部分学生能从字面意思判断一变换保持向量的加法和数乘即为线性变换, 但是却无法建立线性变换的几何认知。课堂上可通过几何直观实现可视化教学, 让抽象概念具体化。

取线性空间 $V=R^2$, 取线性空间 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, 任意 $\alpha=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$, 定义 $\sigma(\alpha)=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 。从形式上看, 该变换是将任意实二维列向量左乘一个二阶矩阵, 得到的仍是实二维列向量, 容易验证该变换是线性变换, 但其几何意义是什么呢? 可进行动态展示平面旋转, 通过改变旋转角 θ , 学生可实时观察向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 经矩阵的作用后的运动轨迹。



在教学中引入线性变换的图形演示具有多重优势。几何直观能突破抽象符号的认知壁垒, 通过动态展示学生可以直观理解矩阵元素与变换效果的对应关系, 这种可视化表达不仅符合认知心理学中, 更能激发学生的空间想象力, 帮助学生在代数与几何间建立深刻联系^[9-10]。

(三) 分类讨论思想

分类讨论思想是指根据数学对象或问题的本质特征, 将其划分为不同类别, 并针对每类情况分别进行系统性分析与求解的方

法论。这一思想贯穿于高等代数的理论构建和问题解决中,具体体现在以下几个方面。

1. 代数结构类型的划分

高等代数中根据维数的不同将线性空间分为有限维线性空间和无限维线性空间,两者的核心区别在于:有限维线性空间存在有限基(基向量组所含向量的个数即为维数);无限维线性空间不存在有限基,任何基均为无限几何,所以其维数为无穷大,数域P上一元多项式全体构成的空间P[x]是常见的无限维线性空间,不同空间适用于不同的性质和定理。通过精细化的分类揭示结构共性、规避逻辑疏漏,并建立普适性结论^[11]。

2. 问题求解的条件细化

例:取a,b什么值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1, \end{cases}$$

有解。

在中小学方程组的解题中,一般只出现有唯一解和无解这两种情况,受初等数学解题经验限制,部分学生易片面化理解“有解”条件,忽略有无穷多个解的情形,高等数学中有个非常重要的思想——无限。在本题中,要考虑有一解和多解的情形,具体解题步骤如下:

解:对增广矩阵作初等行变换,化为阶梯形矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

情形1:当时 $a \neq 1$, $R(A) = R(\bar{A}) = 4$, 方程组有唯一解。

情形2:当时 $a=1$, $b=-1$ 对增广矩阵作初等行变换,化为行最简形。

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(\bar{A}) = 2 < 4$, 此时方程组有无穷多个解。

对应的与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases}$$

令 $x_3=0$, $x_4=0$ 自由未知量,得原方程组的一个特解

$$\eta_0 = (-1, 1, 0, 0)^T$$

令 $x_3=1$, $x_4=0$ 得导出组的基础解系为:

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0)^T, \eta_2 = (1, -2, 0, 1)^T$$

故此时原方程组的通解为 $\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数。

本题中只涉及了有解的条件,若在一般问题中问“线性方程组解的情况”时,不要遗漏无解的情况。

3. 定理应用的细化

判断线性变换是否可对角化,即线性变换在一组适当的基下(n维)为对角矩阵,若满足以下条件中的任意一条即可对角化:

- (1) 若线性变换有n个线性无关的特征向量;
- (2) 若线性变换有n个不同的特征值;
- (3) 若线性变换的几何重数代数重数。

分类讨论的思想在高等代数中体现了逻辑的严密性、方法的系统性和理论的完备性,可有效规避逻辑疏漏、解决问题,构建完整的结论。

(四) 化归思想

化归思想是指将复杂或未知的代数问题转化为已知结构或简单形式,通过建立等价关系或映射路径实现问题解决的方法论。

1. 问题的等价转化

实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 按照其取值不同的情形可分为五类:对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \dots, c_n$, 如果都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$, 那么称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定的;如果都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \geq 0$, 那么称为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 半正定的;如果都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) < 0$, 那么称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为负定的;如果都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq 0$, 那么称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为半负定二次型;如果它既不是半正定又不是半负定,那么就称为不定二次型。根据定义不容易直接判断出二次型的类型,可转化为求标准形和二次型对应矩阵的特征值,具体方法如下。

方法一:通过配方法(或合同变换法或正交变换法)将原二次型化成标准形,通过正负惯性指数判断,具体情形如下(将标准形中的正、负惯性指数分别记为p和q,二次型的秩记为r):

- (1) 若 $p=r=q$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定二次型;
- (2) 若 $p=r < n$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定二次型;
- (3) 若 $q=n=r$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是负定二次型;
- (4) 若 $q=n < r$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半负定二次型;
- (5) 若 $p+q=r$ 且 $p > 0, q > 0$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是不定二次型。

方法二:利用实对称矩阵的特征值的性质刻画二次型的正定性。首先写出原二次型对应的实对称矩阵A的全部特征值,设为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$;然后根据特征值的正负即可判断二次型的类型,具体情形如下:

- (1) A为正定(半正定)的 $\Leftrightarrow \lambda_n > 0$ ($\lambda_n \geq 0$);
- (2) A为负定的(半负定) $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0$ ($\lambda_n \leq 0$);
- (3) A为不定的(半负定) $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0$ 且 $\lambda_n < 0$ 。

例:判断实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 的类型。

解:方法一:配方法

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 - 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

将二次型化为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

正惯性指数为2, 负惯性指数为1, 该二次型为不定二次型。

方法二:二次型对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 3 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

特征值为 $\frac{9+\sqrt{89}}{2}$, 1 , $\frac{9-\sqrt{89}}{2}$
由 $\frac{9+\sqrt{89}}{2} > 0$, $\frac{9-\sqrt{89}}{2} < 0$,
知矩阵 A 是不定的, 故该二次型为不定二次型。

2. 抽象与具体的转化
在数域 P 上的任意 n 维线性空间 V (抽象空间) 中取定一组基后, V 中任一个向量 α 有唯一确定的坐标 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 向量 α 的坐标是 P 上的 n 元数组, 因此属于 P^n . 由此可构造 V 到 P^n 间的同构映射,

$$\sigma: V \rightarrow P^n, \alpha \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

任一抽象空间中的向量都可以用坐标表示, 向量的运算就可以转化为坐标的运算, 所以抽象空间都可以借用具体空间的计算工具来解决。

四、教学效果对比
两个平行数学班级(各 55 人)分别采取传统讲授法, 侧重公式、定理推导与例题演练(对照组); 另一个班级用数学思想渗透教学, 从学生认知出发, 深度融合数形结合、抽象化等数学思想(实验组)。实验周期为 16 周, 试验结束后用同一张试卷测试两个班级对知识的掌握, 具体结果如下:

评估维度	对照组均分	实验组均分
概念理解	71.4	85.5
知识运用	75.3	82.7
创新项目得分	68.4	79.4
解题正确率	71.7	82.5

通过对比实验组(数学思想渗透教学法)与对照组(传统讲授法)的教学效果发现, 数学思想的系统融入显著提升了学生的综合学习能力。实验数据显示, 实验组在概念理解、知识运用、解题正确率、及创新项目得分等维度均分较对照组提高约 12%–20%, 表明抽象化、数形结合、分类讨论等数学思想的教学策略能够有效降低高等代数的抽象性认知壁垒。实验结果验证了数学思想作为教学纽带的重要性, 其通过连接抽象理论与实际应用, 促进学生从机械记忆向高阶思维的转变[14]。

五、结语
本研究通过对比实验组(数学思想渗透教学法)与对照组(传统讲授法)的教学效果, 系统探讨了数学思想在高等代数教学中的应用价值及其对学生综合能力的影响。实验结果不仅验证了数学思想渗透教学的有效性, 还揭示了其对学生高阶思维能力的促进作用。具体而言, 抽象化思想通过剥离具体对象的非本质特征(如多项式与向量运算的共性提炼), 帮助学生构建了线性空间的普适性框架; 数形结合思想借助几何直观(如线性变换的动态演示)突破了抽象符号的认知壁垒; 分类讨论思想则通过细化问题条件(如线性方程组解的存在性分析), 强化了学生逻辑推理的系统性。此外, 化归思想通过问题转化(如二次型判定与特征值分析的结合), 提升了学生解决复杂问题的迁移能力。实验组学生在创新项目中表现出的多角度分析能力(如利用矩阵变换设计几何动画), 进一步体现了数学思想对创新意识的激发作用。

然而, 本研究仍存在一定局限性。首先, 实验样本仅限两个平行班级(共 110 人), 且实验周期为 16 周, 长期效果有待进一步追踪。此外, 研究未细分学生群体(如不同数学基础或性别)对教学法的适应性差异, 后续可引入分层实验设计以完善结论。

数学思想的教学应用未来将从以下方向进行改进和完善:
1. 跨学科融合: 探索数学思想在计算机科学、物理学等领域的迁移路径。例如, 将线性空间的抽象化思想与数据结构教学结合, 帮助学生理解算法设计的数学本质。
2. 技术赋能教学: 利用动态数学软件、虚拟现实等工具, 构建更具沉浸感的数形结合教学场景。例如, 通过 VR 展示高维线性空间的几何结构, 降低抽象概念的认知难度。
3. 课程体系重构: 设计以数学思想为主线的模块化课程, 打破传统按知识点划分的教学模式。例如, 围绕“化归思想”整合方程求解、矩阵分解等内容, 强化知识的内在关联性。
4. 长效评估机制: 建立覆盖多个学期甚至学年的追踪研究, 评估数学思想教学对学生科研能力、职业发展的长期影响。
总之, 数学思想不仅是高等代数数学的理论内核, 更是培养学生创新思维与问题解决能力的关键抓手。

参考文献:

[1] 田东霞. 数学思想方法在高等代数教学中的应用 [J]. 湖北成人教育学院学报, 2024,30(03):59–64.

[2] 杜翠真, 卓泽朋. 高等代数教学中渗透课程思政的思考与教学实践 [J]. 美眉, 2022(12):0181–0183.

[3] 田金玲. 高等代数教学中数学归纳法的应用分析 [J]. 江西电力职业技术学院学报, 2020, 33(12):2.DOI:10.3969/j.issn.1673–0097.2020.12.023.

[4] 韩筠, 陈入云. 高等代数混合式教学的实践研究 [C]// 第四届创新教育与发展学术会议论文集(二). 2023.

[5] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数(第五版) [M]. 高等教育出版社, 2019.

[6] 周慧倩. "高等代数""实践—理论—实践"教学模式研究 [J]. 科技风, 2023(28):118–120.

[7] 李桂贞, 李羽, 莫秋慧, 等. 高等代数课程思政"多维六融"教学模式研究与实践——以惠州学院高等代数课程为例 [J]. 惠州学院学报, 2022, 42(6):123–128.

[8] 罗明燕. 集合思想在高等代数中的解题作用 [J]. 下一代, 2020, 000(012):P.1–2.

[9] 华雯. 数学思想方法在单元教学中的应用——以"二项式系数的性质"教学为例 [C]// 新课改背景下课程理论与实践探究论文集(九). 2023.

[10] 孙菊香, 孙跃娟. 浅谈高等代数的教学 [J]. 中文科技期刊数据库(全文版) 教育科学, 2022(3):3.

[11] 夏春光. 高等代数竞赛中的思想与方法教学探讨 [J]. 教育教学论坛, 2020(30):2.