

图与网络模型的教学改革与实践

白雪洁

(河北农业大学理学院, 河北 保定 071001)

摘要:图与网络模型是运筹学的一个分支。本文基于 OBE 理念,以“两性一度”为标准探索网络优化问题的教学设计,以网络最大流问题为核心对教学内容进行重组,以案例驱动加强师生研讨,以线性对偶实现数学规划与网络优化的融汇贯通,以科研问题提升学生创新能力。通过一系列教学措施,促进学生对图论知识的理解 and 应用,旨在为运筹学课程改革提供有益参考。

关键词:图论;最大流问题;最短路问题;多商品网络流

图论是古老但又十分活跃、应用非常广泛的运筹学的一个重要分支。借助于图研究问题直观明了,并且能够简化复杂问题,因此许多工程、管理等实际问题都可以通过转化为图论模型来研究。2021 年人才培养方案修订,我校运筹学课程内容调整,除线性规划、对偶理论和整数规划外,增加图与网络模型章节。这部分内容在运筹学教材中一般包括图与网络的基本概念、最短路问题、最小支撑树问题、网络最大流问题、最小费用流问题和最小费用最大流问题。

图与网络模型普遍存在知识点多且离散的特点,课上需要介绍的定义和概念较多。以教师讲授为主的传统课堂会造成学生思考和师生互动少,不利于培养学生将知识应用于解决问题的能力 and 创新思维。孙晓玲和杜建伟通过“数学游戏”、纠错教学、层次教学和分组教学等措施打造精彩高效的图论课堂。蔡丽娜探讨数学建模在“图论”教学中的具体应用,给出图与网络模型教学的实施策略。高红等人以“两性一度”标准,提出教学模式改进、数学前沿进课堂、师生研讨、解决科研问题等措施改革图论课程教学。夏红探讨在新质生产力背景下图论课程教学改革的目标与路径,在新形势下促进学生对图与网络模型的理解与应用。

本文结合笔者的教学实践,以网络最大流问题为核心展开图与网络模型的教学,构建起网络模型间的关系;从数学规划角度反观图与网络模型,使得线性规划与网络优化的相互交融,实现知识创新;实验课与理论课互补,增强学生的实践操作能力,培养学生解决复杂科学问题及适应实际应用场景的能力。

一、网络优化的教学改革

(一)以学生为中心改进教学内容

讲授图与网络模型之前,学生已学习线性规划、对偶理论和整数线性规划,习惯数学模型的方式表述优化问题。网络模型在解决实际问题时,结合所研究问题的特点,借助图论这一工具实现,这是网络优化问题与数学模型的不同之处。网络最大流问题是对公路系统中车辆流、配送网络中商品流、控制系统中信息流、供水系统中水流、电力系统中电流和金融系统中现金流等实际流量最大化问题的凝练。在介绍它的图论求解方法—Fulkerson 算法

前,多数教材给出网络最大流问题的数学模型,使学生平稳过渡到网络优化的学习。不仅考虑流量大小,再考虑“费用”多少后,即为最小费用最大流问题。基于图直接求解的 Ford-Fulkerson 算法,最大流问题关键是确定增广链,最小费用流问题是网络图的权重代表费用时的最短路问题。因此,介绍最短路问题及其求解方法: Dijkstra 算法和 Bellman 算法后,再讲最小费用最大流问题。

最短路问题就是从给定的网络图中找出任意两点之间“距离”最短的一条路。在实际的网络中,“距离”可以是时间、费用等等。有些问题,如选址、管道铺设时的路线选择、设备更新、投资、某些整数规划和动态规划问题都可以归结为求最短路问题。架设电话线、设计供水管道铺设方案等问题,除了考虑路线最短,还需要考虑节点的连通性,可用最小支撑树问题量化解决。

(二)规划视角反观实现知识融合

网络最大流问题,从根本上讲不给出数学模型,也不影响借助网络赋权图讲解 Fulkerson 算法。但这个模型不仅有助于学生对网络最大流问题的本质理解,而且有效构架了线性规划与网络优化的桥梁。反过来也将数学模型可解决的优化问题类型进行了范围扩充;引发进一步思考,网络最大流的数学模型是一个线性规划模型,根据对偶理论,它应该也有对偶模型。如何求出它的对偶模型呢?难点在于网络最大流问题与网络图有关,流量平衡约束需要根据节点是发点、中间节点还是收点进行判断,类似于普通线性规划直接通过观察写对偶规划基本无法实现。

借助 Excel 软件中矩阵的转置功能,可以更直观地写出线性规划的对偶模型。网络最大流问题与图相关,用 Excel 软件辅助可写对偶模型。类似方法,可以写出最短路问题、最小费用流问题等网络模型的对偶模型。

(三)实验理论互补提升操作能力

上机编程操作是提升学生主动学习和知识应用能力的关键环节。图与网络模型章节可以通过选取工程管理领域中的真实案例,如物流配送网络中商品流分析等,让学生分组讨论、分析,最后进行案例汇报,加深理解。实验课上使用 Lingo 软件,基于之前对线性规划和整数线性规划的求解思路,采用定义集合的方式编写

程序。这意味在求解网络模型时,需要有数学规划模型。网络模型与线性规划有本质上区别,网络模型与图密切相关。在编程时,需要让 Lingo 软件获知对应的网络图。定义原始集 vertex,在此基础上定义派生集 arc,采用枚举法列出所有弧,命名 distance、cost 或 flow 表示弧上的距离、费用或流量。

与理论课对应,实验课也从网络最大流问题开始,编程时不是依据教材中给出的 Fulkerson 算法,而是数学模型。在 Lingo 中定义网络图的顶点和弧信息后,按照目标函数、约束条件顺序写出与之对应的程序,求解得到最优解和最优值。在约束条件不变情况下,引入弧上流量的单位运输费用,将最大化流量替换为最小化弧上商品的总费用,即得最小费用流问题的数学模型。需要注意的是,最小费用流问题中流量 v 属于已知参数。如何确定流量 v 呢?如果借助网络最大流问题求解,可以获知 v 的取值上界 $v_{\max}$ 。当 $v < v_{\max}$ 时,为最小费用流问题;当 $v = v_{\max}$ 时,为最小费用最大流问题。

最小费用流问题的数学模型中,更新代表流量的决策变量 f_{ij} 为 0-1 决策变量 x_{ij} ,表示弧 (i, j) 是否位于最短路上,同时将容量限制约束去掉,将流量平衡约束的右端项从 v 替换为 1,得到最短路问题的数学模型。最小支撑树问题的数学模型关键区别处是添加不构成回路的约束条件。

二、物流配送网络教学案例

图与网络模型章节的网络最大流问题等求解在网络图上进行,但在某种程度上,图论的方法也有局限性。当在一个物流网络中考虑多种商品的配送时,如何获取总费用最小的配送方案呢?直接在网络图上无法体现出多种商品间的耦合关系,这时综合网络优化与线性规划的优势是解决问题的途径,用数学模型法量化建模,结合图的结构用软件编程求解。下面以物流网络为例展示多商品的配送方案。

在图 1 的物流网络中配送两种商品,第 1 种商品发点为 1,收点是 7,配送量为 25;第 2 种商品发点为 2,收点是 6,配送量为 2。图 1 (1) 中弧上数字代表容量,图 1 (2) 中弧上数字代表两种商品的单位运费。如何确定总费用最小的配送方案呢?

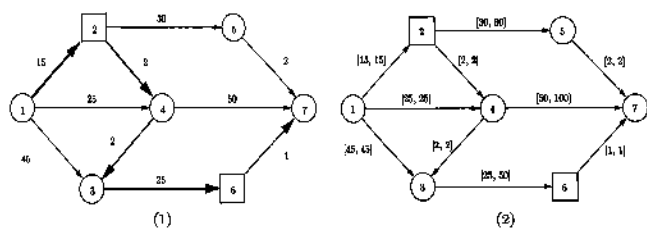


图 1 多商品网络流的基本数据

引入决策变量表示不同商品在不同弧上的流量,总费用为目标函数进行最小化,商品在节点的流量平衡、容量限制为约束条件建立数学模型。用 Lingo 软件编程求解得最优配送方案如图 2 所示,第 1 种商品有 3 条路线: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$, 运输量为 2;

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 7$, 运输量为 22; $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$, 运输量为 1; 第 2 种商品的运输路线为: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6$, 运输量为 2, 总费用为 1923 元。

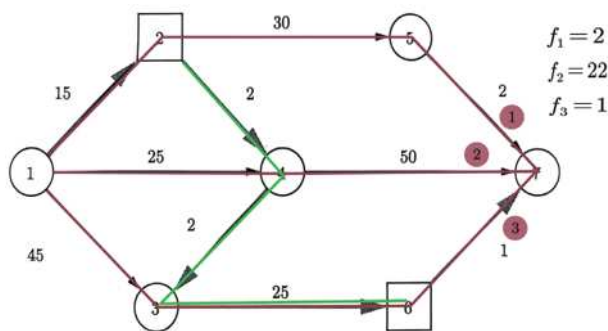


图 2 多商品网络流的最优方案

三、总结

本文基于学生中心成果导向的 OBE 教学理念,以“两性一度”标准,探讨了网络优化问题的教学设计。以数学规划视角反观网络优化问题,将网络最大流问题作为中心,辐射至最小费用流问题、最短路问题和最小支撑树问题,进一步通过线性对偶理论和多商品网络流案例建立网络优化与线性优化的联系,实现知识的融会贯通。图与网络模型在计算机科学、经济学领域和生物学领域发挥有广泛的作用,开展跨学科的学习与研究以适应新质生产力发展需求,可以作为将来的探索方向之一。开展项目驱动和案例分析的教学实践,比如以“双碳”为目标设计“智慧城市交通网络优化”主题案例,从实际应用场景中提炼问题丰富双创案例和项目也是未来努力方向。此外,文中的实验均采用 Lingo 软件编程实现,将来还需更新编程技术,用 Python+Gurobi 进行编程实战,增强学生的实践操作能力。

参考文献:

- [1] 刘瑜,代钦. 追寻图论起源探幽名题论证 [J]. 数学通报, 2022, 61 (9): 41-44.
- [2] 孙晓玲,杜建伟. 关于图论课堂教学的探讨与研究 [J]. 教育教学论坛, 2022 (31): 301-302.
- [3] 薛丽娜. 数学建模在“图论”教学中的作用解析 [J]. 数学学习与研究, 2023 (27): 10-12.
- [4] 刘兴禄. 运筹优化常用模型、算法及案例实战 [M]. 清华大学出版社, 2022.

基金项目: 河北农业大学课程思政优质课运筹学; 河北省高校创新创业教育教学改革研究与实践项目: 基于运筹学专创融合教学改革的课程延展教育研究 (2023cxcy051); 教育部产学合作协同育人项目 (231001913012308、231002070015217、231106627203620)

作者简介: 白雪洁 (1981-), 女, 河北武安人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 最优化理论与应用。