线性代数中的不变性哲学思想及其应用

孙晓青　肖燕婷

（西安理工大学理学院，陕西 西安 710054）

摘要：本文探讨线性代数课程中变与不变的对立统一性的哲学思想，通过对线性代数重要知识点的分析得以呈现，以更高的视角理解教学内容的本质，从而培养学生辩证思维能力和创新思维能力。

关键词：线性代数；对立统一；不变性

一、引言

数学和哲学虽然是两个学科，但是它们有跟多相似的地方，它们都侧重于抽象思维和逻辑推理。菲尔兹奖、邵逸夫数学奖得主数学家德莫林斯说过：“没有数学，我们无法看穿哲学的深度；没有哲学，人们也无法看穿数学的深度；而若没有这两者，人们就什么也看不透。”

线性代数是理工科培养计划里必修的数学类的基础课，线性代数、高等数学、概率论是高等教育中最重要的基础数学课程。线性代数的理论不仅渗透到了数学的许多分支中，而且在其他理工科等领域中都有着广泛的应用。学生通过对该门课程的学习，不但能掌握线性代数的基本知识和应用，而且在逻辑推理、抽象思维、数学表达等方面的都得到了训练。线性代数具有概念多、性质多、结论多的特点，抽象性和逻辑性都较强，因此初学者的学习过程中感到非常吃力。在教学中，如何提高学生对该门课的学习兴趣和学习能力，是线性代数教师教学中不断探索的关键问题。

哲学关系里的普遍联系性、有限与无限、特殊与一般、变与不变等的对立统一性在线性代数的教学内容里有很多体现。本文就线性代数内容的变与不变的对立统一性进行了深入探讨，在讨论中我们发现每一章的内容都有体现，希望通过对这些知识点的梳理和深入挖掘，从而帮助学生更容易理解这些知识点，最终更好地掌握这门课程。

二、线性代数中的不变性

（一）行列式计算中的不变性

行列式是线性代数中第一章的中心概念，行列式理论是在研究线性方程组的解法中产生的。行列式计算过程中最常用的方法是行列式的七条性质，其中性质 3 是：行列式可以按一行或一列展开，即行列式中任意一行（列）的元素与其对应的代数余子式乘积之和等于该行列式；性质 6 是：行列式某一行（列）的倍数加到另一行（列），行列式的值不变。以上两个性质在行列式计算里用得最频繁，在计算过程中，将一个一般行列式化简为特殊形式进行计算，比如三角行列式、对角行列式，分块上三角行列式或者分块对角行列式等，再进行计算。在这个过程中虽然行列式的形式改变了，但是行列式的值不改变。这就是“形变质不变”的辩证思想。

例如，$D=\begin{vmatrix}5&0&4&2\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&0\\0&0&-7&-4\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-7.$

在这个行列式的求解过程中，用到了两行互换，两列互换，一行的倍数加到另一行，整个过程中行列式的形式一直在变化，但是行列式的值不改变。

（二）矩阵的不变性

矩阵是线性代数中最重要的概念之一，学习线性代数的主要目的就是要利用矩阵这一数学工具去解决各种与之相关的实际问题。

矩阵的秩在求解线性方程组、判定向量组的线性相关性都有重要的作用。初等变换不改变矩阵的秩，也就是说在矩阵的初等变换下，矩阵的秩是个不变量。设 $\mathbf{A}\in P^{m\times n}$，A 经过若干次初等变换变为矩阵 B，则 A，B 等价，虽然矩阵的形式发生了改变，但是它们的秩相同。这也体现了“形变质不变”的辩证思想。

例如，一个矩阵 A 可以经过若干次初等行变换化成称行阶梯型矩阵 $\mathbf{B}_1$，继续用初等行变换将其化为行最简型矩阵 $\mathbf{B}_2$，还可以继续用初等列变换将 $\mathbf{B}_2$ 化为标准形 $\begin{pmatrix}\mathbf{E}_r&O\\O&O\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩、矩阵 $\mathbf{B}_1$ 的秩、矩阵 $\mathbf{B}_2$ 的秩、矩阵 $\begin{pmatrix}\mathbf{E}_r&O\\O&O\end{pmatrix}$ 的秩都等于 r。在这个过程中，我们看到矩阵的形式在不断发生变化，在这个变化中却有个不变的量，就是矩阵的秩。不同于行列式，这些矩阵之间不相等，因此它们中间都是用箭头链接的。根据矩阵标准形的唯一性，可以对矩阵进行分类或者解决一些应用问题。

另外，利用分块矩阵的思想，还可以将矩阵分为行向量组和列向量组，矩阵的秩等于矩阵行向量组的秩，也等于矩阵的列向量组的秩，这个结论将矩阵的秩跟向量组的秩联系在一起了。

（三）线性方程组理论中的不变性

线性方程组构成了线性代数的核心。线性方程组的发展是线性代数的起源，后续的许多概念都可以通过线性方程组来理解和应用。

高斯消元法是求解线性方程组的经典方法。一个线性方程组消元的过程中，虽然方程组的形式发生了很大的变化，但是解是不改变的。

例如：

$$\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=2\\-3x_1+3x_2+6x_3=3\\2x_1-5x_2-3x_3=-1\\x_1+11x_2+3x_3=4\end{cases}，消 x_1 得：\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=2\\6x_2+3x_3=3\\-15x_2-5x_3=-5\\6x_2+2x_3=2\end{cases}$$

这两个线性方程组形式不同，但它们是同解的，即解是不变的。因此求解线性方程组时消元的过程让方程组的形式变得越来越简

单，但是解一直都没有改变。

另外，齐次线性方程组有非零解的情形，所有的解都可以用它的基础解析线性表示，然而基础解析是不唯一的。求解过程中，自由变量的选取方法不唯一，导致了基础解系不唯一，然而基础解系所含向量的个数是唯一不变的，等于未知数的个数减去系数矩阵的秩（n–r）。非齐次线性方程组在有无数多解的情形，通解表示也是不唯一的，但结构都是用它的一个特解加上导出组的通解来表示的，这种形式是唯一的。

（四）向量组的不变性

向量是线性代数、解析几何中的重要内容，学生在中学就学过向量的知识。它与矩阵、线性方程组紧密相关。在教学中我们发现，向量组的知识比较琐碎，学习理解起来较为困难，因此我们尽量列举三维向量，再一步步推向高维。其中，向量组的线性相关性是研究向量的关键知识点；齐次线性方程组的基础解系，以及非齐次线性方程组解的结构都是以向量组的线性相关性为基础的；向量组的线性相关性也是研究线性空间的维数与基的重要工具。

在向量的线性相关性中有以下常见结论：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，添分量后得到的新向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也线性无关；向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则它的任何部分向量组都线性无关；一个向量组的部分向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 如果线性相关，那么原来整体向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 也线性相关。这些都反映了向量组的联系和不变性。

此外还有，研究向量组的“窗口”是向量组的极大线性无关组。一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与它的极大线性无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价的。然而同一个向量组而言，它的极大线性无关组是不唯一的，例如：$\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(2,3,0)$，容易证明 α_1,α_2，α_2,α_3，α_1,α_3 都是它的极大无关组，但是同一个向量组的极大无关组和极大无关组是等价的，即 α_1,α_2，α_2,α_3，α_1,α_3 等价。那么极大无关组包含的向量个数始终是不变的，我们称之为向量组的秩。

类似的，齐次线性方程组求解中，当它有非零解时，它的通解是基础解系的线性组合，即 $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$。同极大无关组类似，基础解系是不唯一的，但它们是等价的，所以基础解系含向量的个数是固定的，为 n–r 个。

在线性空间中，基是不唯一的，不同的基是等价的，同样的，基所含向量的个数是唯一的，这个数就称为线性空间的维数。学生在学习中将这些不变性放在一起理解，不但能发现知识点的联系，而且特别容易记忆。

（五）特征值与特征向量的不变性

特征值和特征向量在工科的很多专业中都有应用，它们与矩阵的相似变换、矩阵的对角化、矩阵的幂次运算、二次型化标准形等密切相关。在教学中，为了帮助学生理解特征值和特征向量的性质，整理了下面的表格，该表给出了矩阵 A 的特征值与 A 相关的矩阵的特征值的关系。

A	A^T	kA	A^2	A^m	A^{-1}	$\varphi(A)$
特征值 λ	λ	$k\lambda$	λ^3	λ^m	$\lambda^{\;1}$	$\varphi(\lambda)$
特征向量 x	不确定	x	x	x	x	x

从上面的关系可以看到，除了转置矩阵外，虽然矩阵不相同，但是它们的特征值是有关系的，而且特征向量是不变的。

另外，相似的矩阵关系中，它们有相同的特征值。一个矩阵如果可以对角化，对角化后得到的对角矩阵的主对角线元素就是原矩阵的特征值。实对称矩阵为对角矩阵时，利用了正交替换法，也有同样的结论。

（六）二次型的不变性

在数学、物理学、信号处理、经济学等许多理论和实际问题中都会遇到二次型转化成标准形的知识。化二次型为标准形的方法有配方法、初等变换法和正交替换法。二次型的标准形是不唯一的，即平方项的系数可以不相同，但是它的规范形是唯一的，规范形的系数只能是 1 或 –1，1 的个数是二次型的正惯性指数、–1 的个数是它的负惯性指数，这就是二次型的唯一性定理。

值得一提的是，用正交替换法化二次型，得到的标准形是唯一的，平方项的系数是二次型对应的矩阵的特征值。

三、小结

本文重点探讨了线性代数课程里每个章节中变与不变性的辩证思想。内容基本涵盖了线性代数里的所有重点知识。通过分析，将数学知识和哲学思想相互关联，找到了抽象知识的深层本质，不仅帮助学生对整个线性代数的内容进行串联，而且培养了学生的辩证能力和创新能力。

参考文献：

[1] David C.Lay，Steven R.Lay，Judi J.McDonald.Linear Algebra and Its Applications（Fifth Edition）［M］. 刘深泉，张万芹，陈玉珍，等译 . 北京：机械工业出版社，2018.

[2] 同济大学数学系 . 工程数学线性代数［M］.6 版 . 北京：高等教育出版社，2014.

[3] 孙晓青，唐平 . 翻转教学模式在线性代数教学中的应用 [J]. 教育教学论坛 .2017，8：189-190.

[4] 刘与嘉，周小辉 . 线性代数教学中若干“可视化”教学案例 [J]. 高等数学研究，2024，27（1）：85-90.

[5] 蒋启芬，崔振，朱琳 . 线性代数线上、线下混合式教学设计与实践—以上海交通大学线性代数教学为例 [J]. 大学数学 .2023，39（4）：40-44.

[6] 刘学鹏，张棍 . 矩阵在各种变换下的不变量及其应用 [J]. 菏泽师专学报 .1995，53（4）：37-39.

基金项目：西安理工大学教学研究项目（xjy2344，xzwjy2308），陕西省自然科学基础研究计划（2024JC–YBMS–070）.

作者简介：孙晓青（1984-） 女，河南郾城，讲师，博士，研究方向：代数学 .