一题多解和一题多变在高等数学教学中的应用

李 瑞
（深圳技术大学，广东 深圳 518118）

摘要：本文以高等数学中的平面方程求解为例，探讨了一题多解和一题多变教学方法的应用 . 该方法不仅增强学生的分析能力，还加强了不同知识点之间的联系，对培养学生的发散性和创新性思维具有重要作用 .

关键词：一题多解；平面方程；一题多变；思维能力 .

高等数学是大学期间的重要学科，也是后续专业课程学习的基础。在教学中，我们发现学生常常缺乏对问题的深入思考和知识点之间的联系 . 一题多解的方法通过从不同角度分析同一问题，不仅提高学生的分析能力，还强化了知识点的关联性，是教学中的重要手段。下我们通过具体的例子来说明该方法的妙用和对学生的启发 .

例 1：求过直线

$$L_1:\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-2y+4z-5=0 \end{cases}$$

且与直线 L_2 平行的平面方程

分析：通常情况下该问题的处理思路是寻找平面的法向量，由题目易知，平面的法向量与两条直线的方向向量均是垂直关系，所以一个直接的办法就是寻找平面的法向量，寻找法向量一种办法是利用叉积或者说是数量积，另外一种方法则是利用曲线中的切向量的求解方法来计算直线的方向向量 .

法一：利用叉积易得直线 L_1 的方向向量为

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (6,-5,-4),$$

显然直线 L_2 的方向向量为 $(1,2,-1)$，故而再利用叉积得到平面的法向量为

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (13,2,17),$$

最后我们只需找到平面的任一个点的坐标，利用点法式则可得到平面的方程 . 根据已知条件，取直线 L_1 上任一点，这里不妨取点（ $-1,1,2)$， 进而可得平面方程： $13(x+1)+2(y-1)+17(z-2)=0$

分析：然而本题不仅可以利用叉积，还可以利用曲线中讲到的寻找切向量的方法来做 . 此时曲线的切向量就是直线的方向向量 .

法二：对直线 L_1 的方程，两端同时关于 x 求导得到：

$$\begin{cases} 1+2\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1-2\dfrac{dy}{dx}+4\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

则可得直线 L_1 的方向向量为

$$\left(1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right)=\left(1,-\frac{5}{6},-\frac{2}{3}\right)$$

之后重复法一中相同的剩余步骤得到平面的方程 .

分析：另外本题除了以上两种方法以外，还可以利用平面束方法来进行求解 .

法三：根据题目可知平面经过直线 L_1，则利用平面束方程可以得到经过直线 L_1 的一族平面，其方程

$$x+2y-z+1+\lambda(x-2y+4z-5)=0$$

又由于该平面与直线 L_2 平行，则平面的法向量与直线的方向向量垂直：

$$1(1+\lambda)+2(2-2\lambda)-1(4\lambda-1)=0$$

进而有 $\lambda=6/7$，最终得到平面的方程：

$$13x+2y+17z-23=0.$$

分析：对于平面方程的表达，除了点法式方程外，一般式方程也极为常用，所以在下面的方法里将使用一般式进行求解 . 而相较于前面的方法，一般式更加随意，只要带入任意三个条件即可 .

法四：设所求平面的一般式方程为 π： $Ax+By+Cz+D=0$

首先由于平面经过直线 L_1，故所求平面必然经过直线上的任意两点，这里取点 $\left(2,-\frac{3}{2},0\right)$ 和 $(1,2,-1)$，则

$$-A+B+2C+D=0$$

$$2A-3/2B+D=0$$

另外由于平面 π 与直线 L_2 平行，则

$$A+2B-C=0$$

结合以上三个方程我们得到

$$\begin{cases} A=-13/23D \\ B=-2/23D \\ C=-17/23D \end{cases}$$

从而得到平面方程：$13x+2y+17z-23=0.$

该例题是我们高等数学中十分简单的例子——求平面的方程，然而通过一题多解的方法，可以发现其涉及的知识点十分丰富 . 通过以上四种方法，学生不仅掌握了平面方程的三种重要表达形式，还理解了直线和平面位置关系等知识点 . 此外解题过程中还涉及到数量积的应用，直线和平面的位置关系，曲线的切向量的求解等相关知识点 . 可以说通过该题的一题多解，可以很好地对高等数学下册第八章的核心的知识点及第九章部分知识点进行应用，同时更是让学生深刻体会到这些知识点之间的联系 . 不仅切身体会到知识学习的力量，同时体会到知识间的互补和升华 . 为了更为全面解析以上四种方法，下借助如下思维导图来说明解决该问

题的相关思路 .

图 1：以上四种方法所涉及知识点和思路图解

注 1：事实上，对于上面的方法每个同学可能选取的点完全不同，从而可以造就出成千上万种解题过程 .

在实际的教学过程中，为了更好地提高学生的创造性和发散性思维能力，我们不仅使用一题多解的方法，一题多变也常常被使用 . 而一题多变的教学方法从本质上来说，也可以认为是案例教学法的重要环节，通常案例教学法包括分析案例，解决案例，归纳推广案例等几个环节 . 而一题多解和一题多变就可以认为是解决案例和推广案例这两个过程 . 借由这样的思想和方法可以极大地提高学生学习的积极性和主动性，更能让学生在此过程中掌握到数学方法的本质和核心 . 下以例 1 为母题考虑题目的如下变形 .

例 2：分别按下列条件求平面方程：

平行于 xoz 而且经过点（ $2,-5,3)$

通过 z 轴和点（ $-3,1,-2)$

平行于 x 轴且经过两点（ $4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$

例 3：求过点（ $1,2,1)$ 而与两直线

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}，和 \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

平行的平面方程 .

例 4：求过直线 $L_1:\begin{cases} x+y-2z+\sqrt{10}=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ 且切于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的平面

以上三个例题均是以例一为母体进行变形，为了说明一题多变的题目和母题之间的联系，下我们以例四为例进行分析 .

分析：相较前面几个题目，例 4 稍微复杂一些，但核心还是在求平面方程 . 根据例一中我们涉及的几类方法，可有如下思路：（1）若对题目不作过多分析，可根据例 1 法四的启发设平面的一般式方程即可，具体可见法一；

若对题目稍作分析，发现平面和球面的相切关系，即所求平面就是球面的切平面，则可采用和例 1 法二类似的想法设出平面的点法式方程，但法向量和点的取法可充分利用球面的性质，具体可见法二；

若考虑到平面经过直线 L_1 的条件，根据例 1 法三的启发可直接设出平面的平面束方程再进行分析，具体可见法三 .

法一：设所求平面的一般式方程为： $Ax+By+Cz+D=0$，根据题目的条件可知球心到直线的距离为 1，则有

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=1$$

另外该平面经过直线 L_1 上的任意两点，不妨取两点为 $\left(0,\sqrt{10},\sqrt{10},\right)$ 和 $\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}0,\frac{4}{\sqrt{10}}\right)$，则有

$$\begin{cases} \sqrt{10}B+\sqrt{10}C+D=0 \\ -\frac{2}{\sqrt{10}}A+\frac{4}{\sqrt{10}}C+D=0 \end{cases}$$

解方程则得平面方程为 $3x-z=\sqrt{10}$ 或 $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{8}{3}z=-\sqrt{10}$.

法二：设平面与球面相切于点（ x_0,y_0,z_0），则平面的方程为 $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$，又根据球面方程则有

$$x_0x+y_0y+z_0z=1$$

由于平面经过直线 L_1 上的任意两点，这里同样取点 $\left(0,\sqrt{10},\sqrt{10},\right)$ 和 $\left(-\frac{2}{\sqrt{10}},0,\frac{4}{\sqrt{10}}\right)$，则有

$$\begin{cases} \sqrt{10}y_0+\sqrt{10}z_0=1 \\ -2x_0+4z_0=\sqrt{10} \\ {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2=1 \end{cases}$$

则有 $z_0=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 或 $z_0=\frac{8}{3\sqrt{10}}$，故得平面方程为 $3x-z=\sqrt{10}$ 或 $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{8}{3}z=-\sqrt{10}$.

法三：设该平面的平面束方程为 $x+y-2z+\sqrt{10}+\lambda(2x-y+z)=0$, 再利用点到直线的距离公式则:

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(\lambda-2)^2}}=1,$$

进而 $\lambda=1$ 或 $-\frac{2}{3}$，故得到平面方程为 $3x-z=\sqrt{10}$ 或 $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{8}{3}z=-\sqrt{10}$.

注：此外利用法二求得切点的坐标后，利用三点法式求得平面方程也是可取的 .

参考文献：

[1] 同济大学数学系 . 高等数学（第七版）[M]. 高等教育出版社 .

[2] 成蓉华，马锐 . 财经院校高等数学案例教学探析 [J]. 科教导刊，2012（35）：15-16.

[3] 丁胜，李世伟 . 例谈空间平面与直线问题的平面束方法 [J]. 科技信息，2008（31）：252，286.

基金项目：深圳技术大学教学改革项目：新工科背景下基于数学学科竞赛驱动的教**学实践模式的探究（20231056010016）；深圳技术大学新引进高精尖缺人才科研启动项目：几类癌症模型的研究和探索（GDRC202213）**

作者简介：李瑞，1987 年 12 月，女，汉族，山西大同人，博士研究生，助理教授，研究方向为偏微分方程与应用。