运用图解法探讨运筹学的对偶理论

范　静

（上海第二工业大学数理与统计学院，上海 201209）

摘要：针对具有高度理论性和重要性的运筹学对偶理论，通过典型例题运用图解法进行分析，为学生提供直观形象的教学方式，引导学生更好地掌握理论知识。

关键词：图解法；对偶理论；最优性；互补松弛定理

一、引言

线性规划由线性的目标函数和线性的约束条件构成，是一种确定性、多变量、单目标的最优化模型，已广泛而深入地应用于会计、金融、市场营销、经营管理等多个领域 。图解法是求解线性规划的一种特殊方法。在教学过程中，通过图形的方式，可以简单直观地对问题的原理和几何意义进行深入理解。运用图解法可求解含有两个变量的线性规划问题，可以结合分支定界法得到含有两个变量的整数线性规划的最优解 ，还可以结合互补松弛定理得到含有多个变量、两个约束的线性规划的最优解。本文将进一步拓展图解法的应用领域，即运用图解法研究对偶理论中的对称性、弱对偶性、最优性、对偶性及互补松弛性。

二、对偶理论及典型例题

对偶理论是线性规划问题中非常重要的内容之一，也是学生们在学习过程中比较难啃的内容之一。每个线性规划问题（称为原问题 Prime Linear Programming，简记为 LP）必有另一个线性规划问题（称为对偶问题 Dual Linear Programming，简记为 DP）与之相对应。从实际生产计划问题的角度来看，从生产者角度提出的极值问题是原问题，而从购买资源者角度提出的极值问题是对偶问题。

设原问题与对偶问题都是规范形式：

$$(LP): \max Z = CX \qquad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$(DP): \min w = Yb \qquad \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

这里，A 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 $1\times n$ 行向量，b 是 $m\times 1$ 列向量，X 是 $n\times 1$ 列向量，Y 是 $1\times m$ 行向量。

原问题与对偶问题之间具有密切的对偶性质：

性质 1 原始问题（LP）与对偶问题（DP）互为对偶。

性质 2 设 X^0，Y^0 分别为（LP）与（DP）的可行解，则 $CX^0 \leqslant Y^0b$。

性质 3 设 X^0，Y^0 分别为（LP）与（DP）的可行解，则 X^0，Y^0 是（LP）与（DP）的最优解当且仅当 $Y_sX^0=0$，$Y^0X_s=0$。

性质 4 若（LP）有最优解，则（DP）也有最优解；同样地，若（DP）有最优解，则（LP）也有最优解，而且两者的最优值相等。

性质 5 设 X^0，Y^0 分别为（LP）与（DP）的可行解，Y_s，X_s 是它们的松弛变量，则 X^0，Y^0 是（LP）与（DP）的最优解当且仅当 $Y_sX^0=0$，$Y^0X_s=0$。

性质 1 说明了原始问题（LP）与对偶问题（DP）之间的对称性。性质 2 也称为弱对偶性质，说明（LP）的任意目标值都不会大于（DP）的任意目标值。性质 3 称为最优性，说明虽然变量个数可能不同，最优解也不同，但两个问题的最优目标值却是相等的。性质 4 也称为强对偶性，说明原始问题（LP）与对偶问题（DP）的最优解的依存关系。性质 5 称为互补松弛定理，其中，$Y_sX^0=0$，$Y^0X_s=0$ 称为互补松弛条件。根据性质 5，若已知一个问题的最优解后，另一个问题的最优解可直接得到，而无需再用单纯形法，即已知 Y^0 求 X^0，或已知 X^0 求 Y^0。

在学习对偶理论的过程中，学生们面对枯燥、烦琐的理论证明，多数学生的掌握程度不如人意。有的只能死记硬背，不能熟练应用；有的甚至对性质内容的理解不透彻，对于相关命题不能判断是否正确。因此，利用图解法研究对偶理论的内容，是十分必要且重要的。

下面，结合典型的例题进行求解和分析。原问题（$LP1$）根据转换关系得到对偶问题（$DP1$）。其中，A 是对称矩阵，即 $A=A^T$，而且 $C=b^T$。

$$(LP1): \max Z = 3x_1 + 4x_2 \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 1.5x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$(DP1): \min w = 3y_1 + 4y_2 \qquad \begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 3 \\ y_1 + 1.5y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

从结果来看，除了变量的符号之外（$LP1$）与（$DP1$）的区别仅在目标的优化方向以及约束的不等号方向。

三、运用图解法探讨对偶理论

（一）图解法的求解过程

首先，根据以下 4 个步骤，运用图解法求解（$LP1$）。

步骤 1：在平面上建立直角坐标系，横轴为 x_1 轴，纵轴为 x_2 轴。

步骤2：绘制直线 L_1：$2x_1+x_2=3$，L_2：$x_1+1.5x_2=4$，将两条直线 L_1、L_2 的交点记为 F，它们与 x_1 轴、x_2 轴的交点分别记为 C 与 D、E 与 B。

步骤3：根据（$LP1$）中不等式的符号，得到（$LP1$）的可行域 FBOC。易见（$LP1$）的可行域 $FBOC$ 为一个有界的闭凸集，根据线性规划的基本理论（$LP1$））一定有最优解，且最优解一定可在可行域 $FBOC$ 的某一顶点取得。

步骤4：绘制垂直于向径（3，4）的一条目标函数的等值线（见图1的虚线）。向径（3，4）的方向是目标函数值增加的方向。平移目标函数等值线，在点 F（0.25，2.5）处，目标函数值取得最大值10.75。即（$LP1$）的最优解为 $x_1^*=0.25$，$x_2^*=2.5$，最优值为 $Z^*=10.75$。

接着，利用类似的方法求解（$DP1$）。

在步骤1中，设横轴为 y_1 轴，纵轴为 y_2 轴。

在步骤3中，根据（$DP1$）中反向的不等式符号，在同一坐标系内画出（$DP1$）的可行域 DFE。（$DP1$）的可行域 DFE 虽然不是封闭的，但也是有界的凸集，因此（$DP1$）有最优解，且最优解一定能在可行域 DFE 的某一顶点取得。

在步骤4中，在可行域 DFE 中沿着向径（3，4）的反方向平移目标函数等值线，在点 F（0.25，2.5）处，目标函数值取得最大值10.75。即（$DP1$）的最优解为 $y_1^*=0.25$，$y_2^*=2.5$，最优值为 $W^*=10.75$。

（二）对偶理论的分析

针对性质1（$LP1$）的系数矩阵与（$DP1$）的系数矩阵实际上是互为转置的两个矩阵，但因为例题中 A 是对称矩阵，即 $A=A^T$，因此，可行域 $FBOC$ 与可行域 DFE 分别在两条直线 L_1、L_2 的两侧。（$LP1$）与（$DP1$）的目标函数中变量的系数满足 $C=b^T$，但方向正好相反。图1生动地展示了原问题与对偶问题的转化结果，有助于学生更好地理解原问题与对偶问题的相互转化。

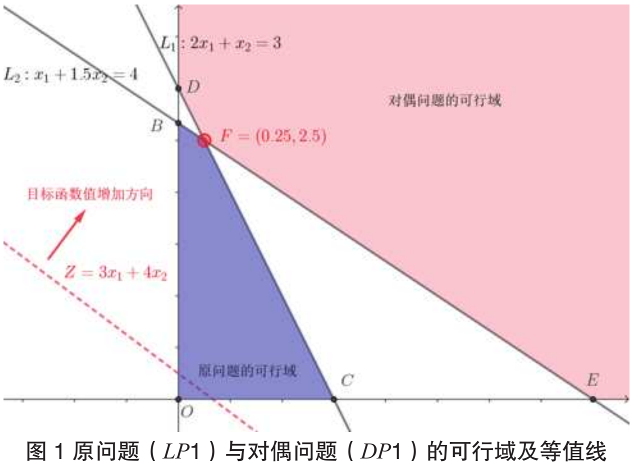

图1 原问题（$LP1$）与对偶问题（$DP1$）的可行域及等值线

针对性质2，由图1显示的目标函数值增加方向可知（$DP1$）的可行域中任何一点的目标函数值均不小于（$LP1$）可行域中任何一点的目标函数值。这充分说明（LP）的任何一个可行解的目标函数值都是（DP）目标函数值的下界；反之（DP）的任何一个可行解的目标函数值都是（LP）目标函数值的上界。学生们在学习的过程中，可以借助此例的图解过程，明确互为对偶的两个问题的可行区域，深刻理解弱对偶性。

针对性质3，在图1中，平移目标函数等值线，在点 F（0.25，2.5）处（$LP1$）与（$DP1$）同时得到最优解，且两者的最优值相等。

针对性质4，当（$LP1$）在点 F（0.25，2.5）处得到最优解时（$DP1$）的目标函数等值线向点 F 处平移（$DP1$）的目标函数值逐渐减少，并且在点 F 处（$LP1$）与（$DP1$）的目标函数值达到相等。

针对性质5，根据（LP1）的最优解 $x_1^*=0.25$，$x_2^*=2.5$，代入到约束条件中，发现两个约束均取得等号，即 $2x_1^*+x_2^*=3$，$x_1^*+1.5x_2^*=4$。此时最优解中松弛变量 $X_s^*=(0，0)^T$。利用互补松弛定理，可得 $Y_sX^0=0$，即在对偶问题的最优解中松弛变量 $Y_s^*=(0，0)^T$。于是，$2y_1^*+y_2^*=3$，$y_1^*+1.5y_2^*=4$。进而得到对偶问题的最优解 $y_1^*=0.25$，$y_2^*=2.5$，且（$LP1$）与（$DP1$）的最优值相等，即 $Z^*=W^*=10.75$。实际上，通过观察图1，松弛变量和剩余变量在最优解点 F 处，均取值为 $(0，0)^T$。学生们可以直观地看到，在原问题和对偶问题的最优解中，哪些约束条件是等式约束，哪些是不等式约束，从而加深对互补松弛性的理解。

四、总结

图解法的直观性，能够在很大程度上激发学生们对运筹学中对偶理论的学习兴趣和理解主动性。通过分析表明，图解法有助于形象地理解对偶理论中的性质，提高对对偶理论的掌握程度。同时，这也对图解法的应用范围，起到了一定的补充作用。在教学过程中，教师们有设计地使用这种形象的教学方式，可以调动学生的感性认识，引导学生观察、分析和归纳，深化学生们对一些理论性强、学习要求高的知识点的理解，加强学生们对理论学习的热爱，进而提升学生们学习效率、培养学生们学术素养和创新能力。

参考文献：

[1] 江大游 . 线性规划问题教学研究 [J]. 福建电脑，2023，37（11）：44-48.

[2] 卢楠，孟红云，刘三阳 . 线性规划的对偶理论在图解法中的应用 [J]. 高等数学研究，2019，22（1）：56-57，89.

[3] 赵芹，章舜哲，刘慧清，雷琪 . 利用对偶理论求解线性规划问题的策略探讨 [J]. 湖北大学学报（自然科学版），2021，43（5）：551-554.