# 中国古代的数学成就融入高等数学教学

杨世显

（长江师范学院数学与统计学院，重庆 408100）

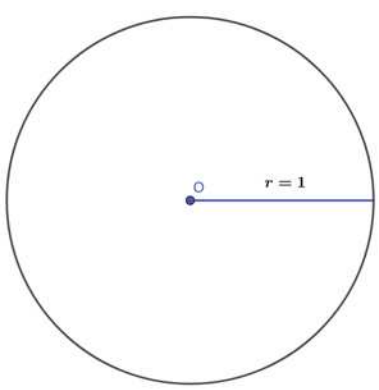
摘要：微积分的中定义和定理，都相对比较抽象，很多学生会觉得这些理论离自身的生活很远，所以学习动力不足，也有畏难情绪，在高等数学课程教学中，加入中国古代与微积分有关的成就，让学生知道，中国人引以为傲的祖冲之在计算圆周率 $\pi$ 的成就其实就和极限思想密切相关，通过这个案例，不仅能让学生更好地理解极限的本质，也能增加我们的民族自信心和自豪感。

关键词：微积分；极限思想；圆周率；割圆术

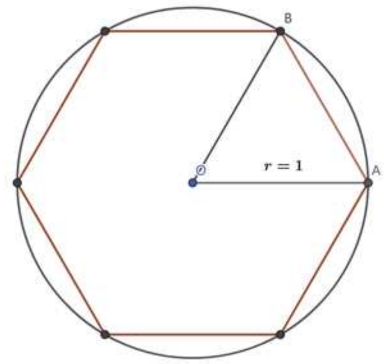
微积分的理论是由牛顿和莱布尼兹于 17 世纪开始创建，接下来的十八十九世纪由拉格朗日、柯西、狄利克雷、黎曼等人不断地发展和完善，在这三个世纪里，中国人没有什么参与感，那微积分就与中国数学人无关吗？非也！早在两千多年之前的《庄子·天下》中就提到“一尺之棰，日取其半，万世不竭……”，这里面已经有明显的无穷思维，也是极限思维的雏形，祖冲之计算的圆周率领先世界上千年，领先原因之一是刘徽开创的割圆术，基本原理就是利用圆的内接和外切多边形周长“逼近”表达圆的周长，这已经是比较成熟的极限思想了。在高等数学的教学中，适时适当的引入中国古代数学的微积分思想，既能增加学生的民族自豪感，也能增进学生的微积分理论的应用思维。

在数列极限讲授的时候，如何让学生理解“$\varepsilon-N$”语言所描述“无限接近”，可以带领学生重走一次祖冲之计算圆周率的过程，祖冲之当时用的方法是刘徽在早于他近 200 年提出来的割圆术，刘徽当时说“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”，下面通过具体的实例解释刘徽这段话的含义。

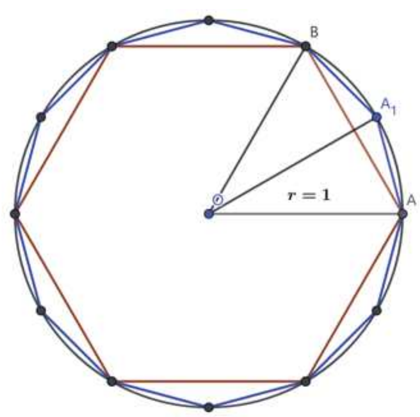
（1）给定一个半径为 1 的圆周




（2）开始割圆，即将圆周六等分，做出它的内接正六边形，由图中$\triangle AOB$为等边三角形可知内接正六边形边长为 1，有正六边形的每条边代替对应的圆弧，就得到了圆的周长的近似值 6，圆周率 $\pi$ 的近似值为 3，这就是割圆术的基本思路，就是把圆周分割后，用圆弧对应的弦来代替自己，实现“化曲为直”，正六边形只是割圆术的起点。




（3）取每个六均分圆弧的中点，就得到圆周的 12 均分点，只要求出内接正十二边形的边长就可以得到圆周长的更精确近似值。




如何计算正十二边形的边长呢？可以在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle AOA_1$ 中结合勾股定理计算，得到 $\left|AA_1\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\approx 0.5176380902$，这时可得到圆周长的近似值 $6.2116570824$，得到圆周率 $\pi$ 近似值为 $3.1058285412$。

（4）依此类推，可以继续取 12 等分圆周的重点得到 24 等分圆周，进而 48 等分圆周，……，就可以通过前面类似的方法，借助勾股定理计算内接正 24 边形边长，正 48 边形边长，……，下表给出（精确到小数点后 15 位）

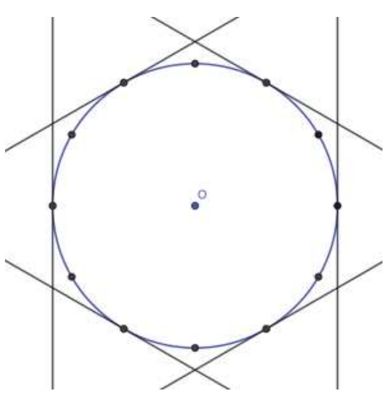
| 序号 | 等分点数 | 算出圆周率 $\pi$ 近似值 | 误差 |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | **3.000000000000000** | **0.141592653589793** |
| 2 | 12 | **3.105828541230249** | **0.035764112359544** |
| 3 | 24 | **3.132628613281238** | **0.008964040308555** |
| 4 | 48 | **3.139350203046867** | **0.002242450542926** |
| …… | …… | **……** | **……** |
| 9 | 1536 | **3.141590463228050** | **0.000002190361743** |
| …… | …… | **……** | **……** |
| 19 | 786432 | **3.141592653587705** | **0.000000000002089** |

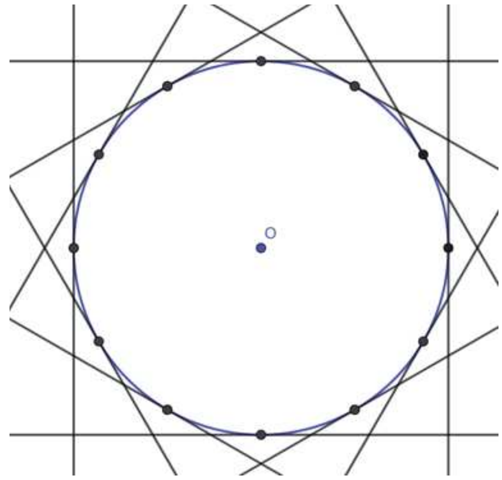
从上表可以看出，进行到第 19 步，利用圆内接正 786432 边形就可以得到比祖冲之更精确的圆周率 $\pi$ 的近似值。对于以上的过程，有以下两个问题需要思考：

第一，祖冲之应该是学习了刘徽的割圆术，在刘徽的基础上，将圆周率的精度提高到了一个历史高峰，这使得祖冲之的名字在中国家喻户晓，那么这个荣誉是不是应该祖冲之和刘徽共同享受？更激进一点，从上面的过程可以看出来，我们利用刘徽的方法，借助于计算机软件，只需不足一秒就可以把圆周率 $\pi$ 算到很高的高度，这说明刘徽提供了方法，祖冲之只是做了更精确的计算而已，是不是功劳应该大部分给刘徽？

这个问题我们可以用现代数学思维做一个解释，刘徽提出了割圆术，相当于建立了“模型”，而祖冲之依照这个“模型”展开计算，根据当时的数学发展水平，开方是困难的，祖冲之相当于提供了模型的“算法”，就是“模型”和“算法”的配合，才有了极佳的效果。所以不能说谁贡献大，可以说他们相互成就了对方，而因为现代计算机级数的蓬勃发展，我们的计算能力飞速提高，才使得我们对于祖冲之的工作越来越无感，这也是数学的一个特点，思想方法是永恒的，而算法是不断更新的。

第二，目前因为我们已经有了圆周率 $\pi$ 的“精确值”，所以我们可以发现随着分点的增加，我们的计算误差越来越小，而刘徽当时是不知道圆周率 $\pi$ 的“精确值”的，他如何知道“割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”从视觉角度看，确实内接多边形边数越多，和圆越接近，这毕竟不严谨，其实刘徽利用了类似于夹逼准则的思想，除了研究内接多边形，同时研究了外切多边形，如下图就是将圆周 6 等分，然后在每个分点做圆的切线，得到外切六边形，进一步均分每段弧得到 12 分点，再做切线就得到外切正 12 边形，依此类推……





可以算出，对于半径为 1 的圆，外接正 6 边形的周长为 $6\sqrt{3}=10.3923048454$，算出圆周率 $\pi$ 的近似值为 **5.1961524227**，可见误差比较大，接着算出外接正 12 边形的周长为 **6.4312766184**，计算的圆周率 $\pi$ 的近似值为 **3.2156383092**，误差已经小多了，直接通过外切正 786432 边形算出圆周率 $\pi$ 的近似值为 **3.141592653589793**，与内接正 786432 边形得到的近似值之差为 **0.000000000002088**，因为圆的周长介于内接和外切正多边形之间，所以就算不知道圆周率 $\pi$ 的真实值，也可以知道我们计算的误差不超过这个差。而刘徽正是利用内切外接多边形的周长的不断接近，就得到了内切和外接多边形的周长真的是以圆的周长为极限的，级不断地分割圆，会最终“无所失”。

一个数学理论的萌芽、形成和发展，要经历几百甚至上千年的历程，如果我们只专注于成型的理论去学习，而不去追其根、溯其源，那就难以理解理论的表述，不能领会理论形成的逻辑，也就慢慢失去学习的动力。能够把理论形成关键事件引入课程教学，会让学生更多的理解理论发展的源动力，也能更好地理解理论的逻辑结构，如果恰好能找到来自于中国数学历史的实例，就能形成课程思政的载体，增加学生对中国古代数学贡献的认识，也能让数学理论更贴近自身的生活。

**参考文献：**

[1] 郭鹏飞，冯秀芳，张超龙，et al. 让直观性原则融于微积分的教学 [J]. 创新教育研究，2019（1）：120-123.

[2] 小文，阿宇 . 祖冲之计算圆周率 [J]. 小猕猴：智力画刊，2020（11）：2.